

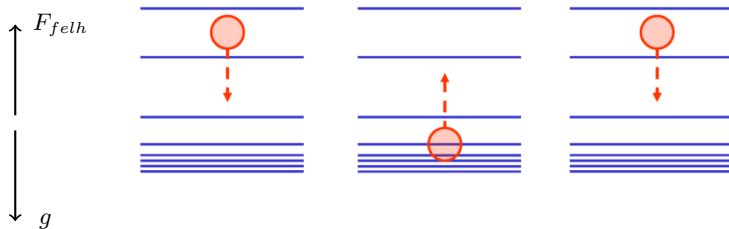
Légköri gravitációs (nehézségi) hullámok és a nagyskálájú áramlás kölcsönhatása: új parametrizáció fejlesztése egy idealizált modellben

Gergely Bölöni, Bruno Ribstein, Ulrich Achatz, Jewgenija Muraschko, Christine Sgoff, Junhong Wei

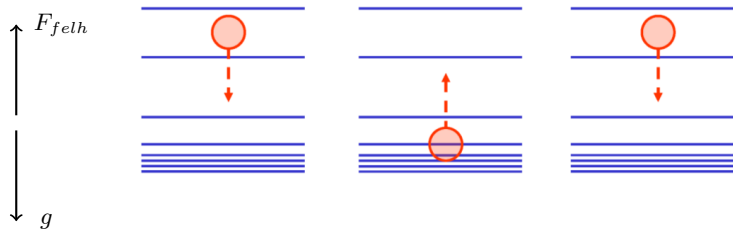


OMSZ, 2016 Április 25

Légköri gravitációs hullámok

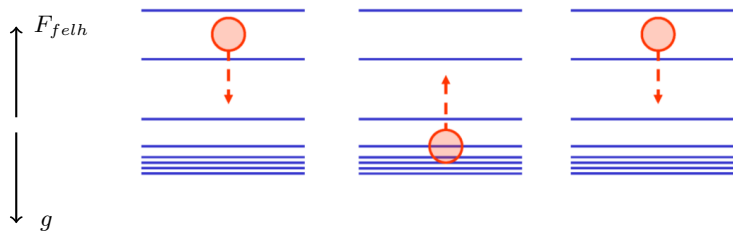


Léggöri gravitációs hullámok



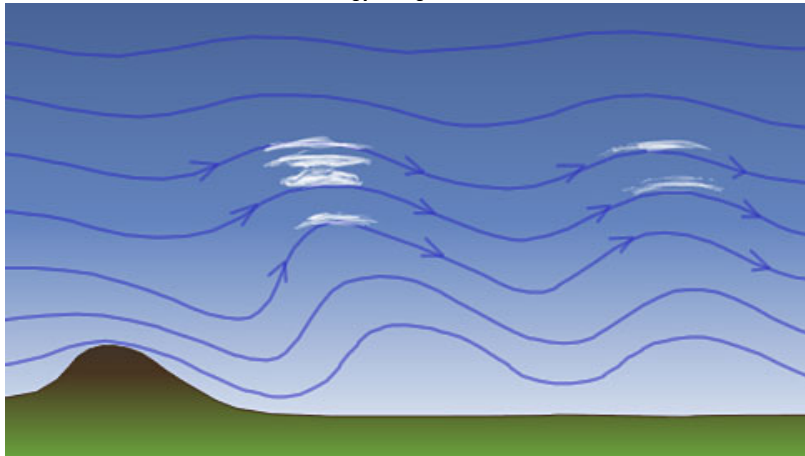
- rezgő mozgás: $\hat{\omega} \approx N$ ahol $N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$, N : Brunt-Väisälä frekvencia

Légköri gravitációs hullámok



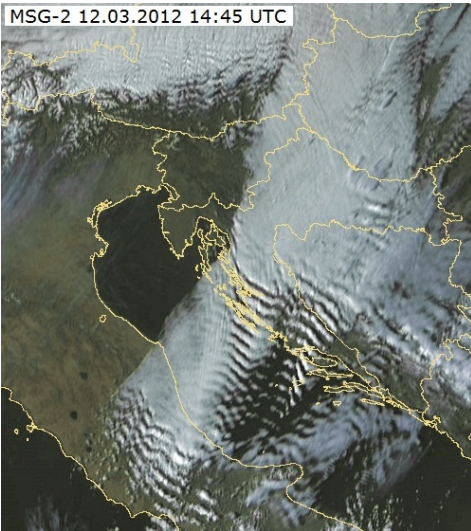
- rezgő mozgás: $\hat{\omega} \approx N$ ahol $N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$, N : Brunt-Väisälä frekvencia
- forgással: $f > \hat{\omega} > N$ ahol $f = 2\Omega \sin \phi$ a Coriolis paraméter (frekvencia)

Példa: hegy mögötti hullámok



(atoptics.co.uk)

Bevezetés

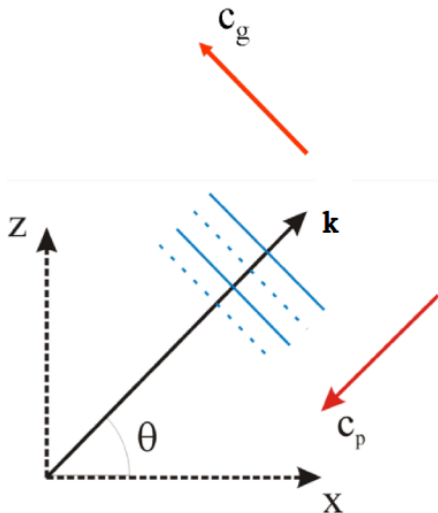


(www.inflowjet.net)



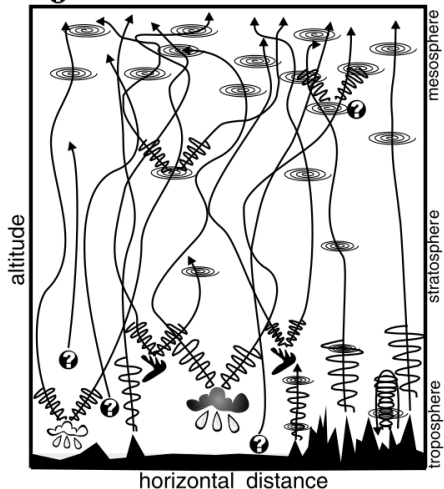
(scripps.ucsd.edu)

Légköri gravitációs hullámok



- fázis sebesség c_p : hullámfrontok haladása
- csoport sebesség c_g : az energia áramlása
- **diszperzív hullámok**: $c_p \neq c_g \Rightarrow$ sőt az energia merőlegesen terjed hullámfrontok haladására

- Gravity Wave Breaking and Drag
- Gravity Wave Group Propagation (Ray) Path
- Gravity Wave Amplitudes and Wave forms
- Jet Stream Instabilities
- Convection/Thunderstorms
- Orography
- Other Unspecified Sources of Gravity Waves



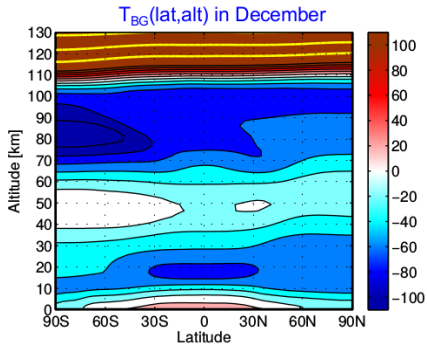
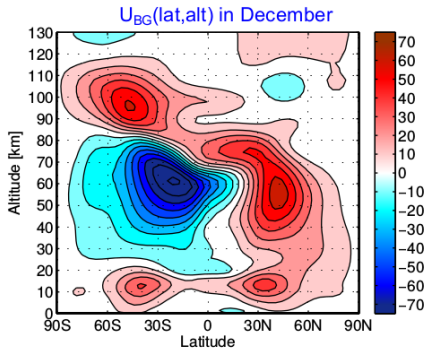
Légköri gravitációs hullámok

- fő források: orográfia, konvekció, jetek/frontok
- függőleges energia szállítás (momentum fluxus) \Rightarrow kölcsönhatás a nagyskálájú áramlással ("drag")
- hullám "törés" \Rightarrow turbulencia, disszipáció, energia átadás a nagyskálájú áramlásnak ("drag")

(Kim et al., 2003)

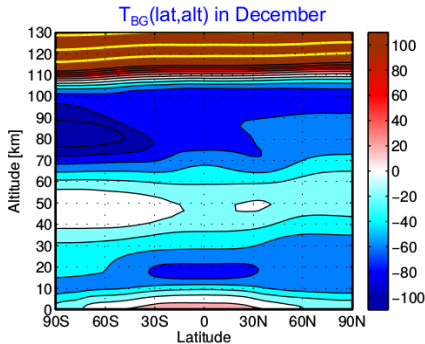
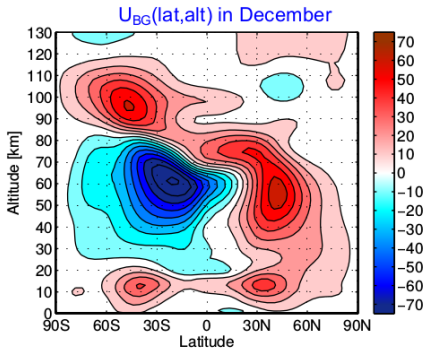
Bevezetés

- Klimatológia (Hammonia GCM, ábra: Bruno Ribstein)



Bevezetés

- Klimatológia (Hammonia GCM, ábra: Bruno Ribstein)

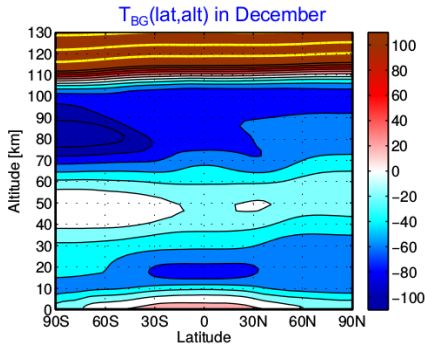
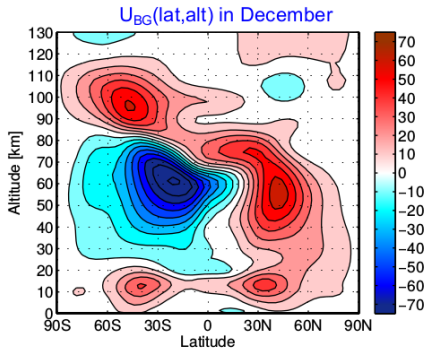


- A mezoszférikus jetet a gravitációs hullámok "táplálják"

$$\left(\frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} u' w'}{\partial z} \right)$$

Bevezetés

- Klimatológia (Hammonia GCM, ábra: Bruno Ribstein)



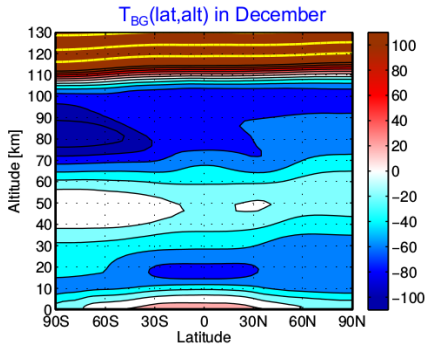
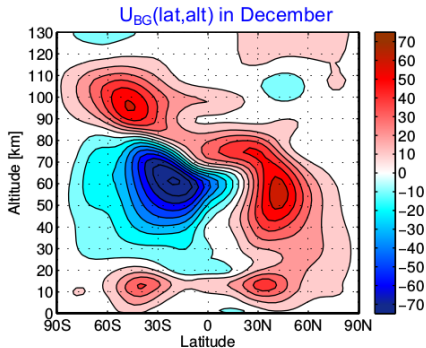
- A mezoszférikus jetet a gravitációs hullámok "táplálják"

$$\left(\frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} u' w'}{\partial z}\right)$$

- A termikus szél egyensúly $\left(\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \Rightarrow$ hőmérsékleti minimum a nyári féltekén a sarok fölött

Bevezetés

- Klimatológia (Hammonia GCM, ábra: Bruno Ribstein)

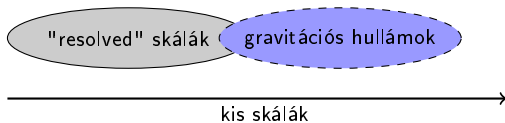


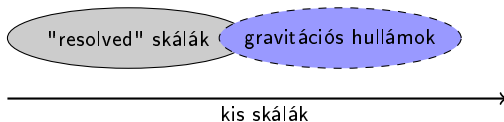
- A mezoszférikus jetet a gravitációs hullámok "táplálják"

$$\left(\frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} u' w'}{\partial z}\right)$$

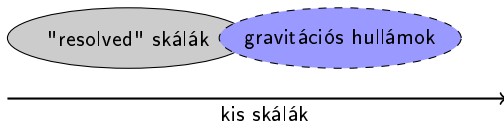
- A termikus szél egyensúly $\left(\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \Rightarrow$ hőmérsékleti minimum a nyári féltekén a sarok fölött

- A nyári pólus a mezoszféra leghidegebb pontja!!!

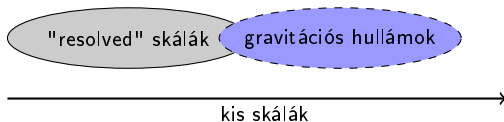




- A gravitációs hullámokat általánosságban nem írják le explicit dinamikai módon a klíma- és időjárás előrejelző modellek \Rightarrow parametrizáció \Rightarrow (Wentzel–Kramers–Brillouin) WKB elmélet



- A gravitációs hullámokat általánosságban nem írják le explicit dinamikai módon a klíma- és időjárás előrejelző modellek \Rightarrow parametrizáció \Rightarrow (Wentzel–Kramers–Brillouin) WKB elmélet
- Jelenleg használt parametrizációk: *egyensúlyi profil* használata a hullám leírásakor, *időfüggetlen* nagyskálájú áramlás, *lineáris elmélet* \Rightarrow a nagyskálájú "resolved" áramlás nem "érzi" a hullámot, amely áthalad rajta \Rightarrow hullámok *pillanatszerűen* adják át energiájukat (momentumukat) a nagyskálájú áramlásnak ott *ahol megtörnek*



- A gravitációs hullámokat általánosságban nem írják le explicit dinamikai módon a klíma- és időjárás előrejelző modellek \Rightarrow parametrizáció \Rightarrow (Wentzel–Kramers–Brillouin) WKB elmélet
- Jelenleg használt parametrizációk: *egyensúlyi profil* használata a hullám leírásakor, *időfüggetlen* nagyskálájú áramlás, *lineáris elmélet* \Rightarrow a nagyskálájú "resolved" áramlás nem "érzi" a hullámot, amely áthalad rajta \Rightarrow hullámok *pillanatszerűen* adják át energiájukat (momentumukat) a nagyskálájú áramlásnak ott *ahol megtörnek*
- Javaslat: a hullámok *nem-lineáris csatolása* a nagyskálájú áramlással \Rightarrow folytonos "tranziens" kölcsönhatás a hullámok és a nagyskálájú áramlás között a hullám terjedése közben

2-D Euler egyenletek, forgatás nélkül:

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

ahol $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$
sebesség mező u, w
nyomás p
Pot. hőmérséklet $\theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$

2-D Euler egyenletek, forgatás nélkül:

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

ahol	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$
sebesség mező	u, w
nyomás	p
Pot. hőmérséklet	$\theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$

"Recept" az egyszerűsítéshez, parametrizációhoz (Achatz et al., 2010):

- A mezők felbontása: $f = \bar{f} + f_b + f_w$

2-D Euler egyenletek, forgatás nélkül:

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

ahol	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$
sebesség mező	u, w
nyomás	p
Pot. hőmérséklet	$\theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$

"Recept" az egyszerűsítéshez, parametrizációhoz (Achatz et al., 2010):

- A mezők felbontása: $f = \bar{f} + f_b + f_w$
- WKB közelítés: $f_w(x, z, t) = \text{Re} F_w(Z, T) e^{i \left[kx + \frac{\phi(Z, T)}{\epsilon} \right]}$
ahol $Z = \epsilon z, T = \epsilon t, m = \partial\phi/\partial Z$ és $\omega = -\partial\phi/\partial T$

2-D Euler egyenletek, forgatás nélkül:

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

ahol	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$
sebesség mező	u, w
nyomás	p
Pot. hőmérséklet	$\theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$

"Recept" az egyszerűsítéshez, parametrizációhoz (Achatz et al., 2010):

- A mezők felbontása: $f = \bar{f} + f_b + f_w$
- WKB közelítés: $f_w(x, z, t) = \text{Re} F_w(Z, T) e^{i \left[kx + \frac{\phi(Z, T)}{\epsilon} \right]}$
ahol $Z = \epsilon z, T = \epsilon t, m = \partial\phi/\partial Z$ és $\omega = -\partial\phi/\partial T$
- Skálázás a gravitációs hullámokra: $\epsilon = L_w/H_\theta \ll 1$: gyenge rétegzettség

(cimss.ssec.wisc.edu)

- Vezető rendben $\mathcal{O}(\epsilon^2)$: *diszperziós-, és polarizációs reláció* \Rightarrow *sugár egyenletek* (ray equations)

- Vezető rendben $\mathcal{O}(\epsilon^2)$: *diszperziós-, és polarizációs reláció* \Rightarrow *sugár egyenletek* (ray equations)
- Következő rendben $\mathcal{O}(\epsilon^3)$: megmaradási egyenlet a *hullám aktivitásra (energia)* és a *nagykálajú áramlást* leíró egyenlet

- Vezető rendben $\mathcal{O}(\epsilon^2)$: *diszperziós-, és polarizációs reláció* \Rightarrow *sugár egyenletek* (ray equations)
- Következő rendben $\mathcal{O}(\epsilon^3)$: *megmaradási egyenlet a hullám aktivitásra (energia)* és a *nagykálájú áramlást* leíró egyenlet
- A csatolt egyenletrendszer:

Hullám

Nagykálájú "resolved" áramlás

$$\begin{aligned} \frac{d_{gz}}{dt} &= \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \equiv c_{gz} & \frac{\partial u_b}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} \text{Re}(U_w W_w^*) \right] \\ \frac{d_{gm}}{dt} &= \mp \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{d u_b}{dz} \equiv \dot{m} & &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (k c_{gz} \mathcal{A}) \\ \frac{d_g \mathcal{A}}{dt} &= -\mathcal{A} \frac{\partial c_{gz}}{\partial z} \quad \left(\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} \right) & \bar{\rho} &= \rho(z) = \rho_0 e^{-z/H} \quad H = \frac{RT_0}{g} \end{aligned}$$

- $\mathcal{A} = E_w / \hat{\omega}$ hullám aktivitás (wave action)

- Vezető rendben $\mathcal{O}(\epsilon^2)$: *diszperziós-, és polarizációs reláció* \Rightarrow *sugár egyenletek* (ray equations)
- Következő rendben $\mathcal{O}(\epsilon^3)$: *megmaradási egyenlet a hullám aktivitásra (energia)* és a *nagykálájú áramlást* leíró egyenlet
- A csatolt egyenletrendszer:

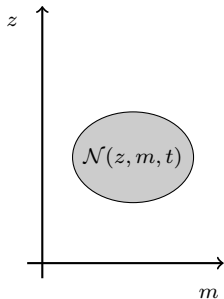
Hullám

Nagykálájú "resolved" áramlás

$$\begin{aligned} \frac{d_g z}{dt} &= \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \equiv c_{gz} & \frac{\partial u_b}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} \text{Re}(U_w W_w^*) \right] \\ \frac{d_g m}{dt} &= \mp \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{d u_b}{dz} \equiv \dot{m} & &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (k c_{gz} \mathcal{A}) \\ \frac{d_g \mathcal{A}}{dt} &= -\mathcal{A} \frac{\partial c_{gz}}{\partial z} \quad \left(\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} \right) & \bar{\rho} &= \rho(z) = \rho_0 e^{-z/H} \quad H = \frac{RT_0}{g} \end{aligned}$$

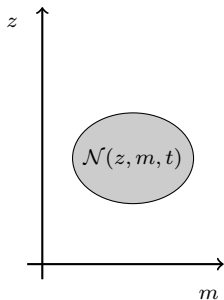
- $\mathcal{A} = E_w / \hat{\omega}$ hullám aktivitás (wave action)
- *Probléma*: ha a sugarak metszik egymást \Rightarrow *kausztika*: több m érték ugyanabban a z magasságban \Rightarrow pl. c_{gz} többértékű m -ben (spektrum)
DE! $\mathcal{A} = \mathcal{A}(z, t)$ (monokromatikus) \Rightarrow numerikus problémák

- Megoldás: 2-D fázistér $(z, m) \Rightarrow$ spektrális kezelés



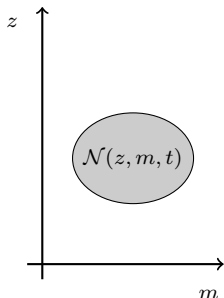
(Muraschko et al., 2015)

- Megoldás: 2-D fázistér $(z, m) \Rightarrow$ spektrális kezelés
- "Fölszeleteljük" a hullám aktivitást kis intervallumokra m -irányban \Rightarrow spektrális hullám aktivitás (energia)



$$\mathcal{N}(z, m, t) = \int_R \mathcal{A}_\alpha(z, t) \delta[m - m_\alpha(z, t)] d\alpha$$

(Muraschko et al., 2015)



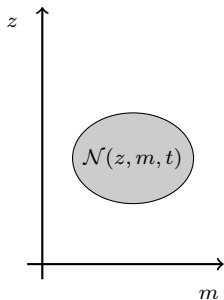
- Megoldás: 2-D fázistér $(z, m) \Rightarrow$ spektrális kezelés
- "Főlszeleteljük" a hullám aktivitást kis intervallumokra m -irányban \Rightarrow spektrális hullám aktivitás (energia)

$$\mathcal{N}(z, m, t) = \int_R \mathcal{A}_\alpha(z, t) \delta[m - m_\alpha(z, t)] d\alpha$$

- Euleri szemléletben

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\partial (c_{gz} \mathcal{N})}{\partial z} + \frac{\partial (\dot{m} \mathcal{N})}{\partial m} = 0$$

(Muraschko et al., 2015)



(Muraschko et al., 2015)

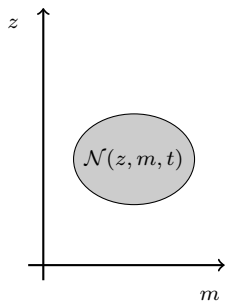
- Megoldás: 2-D fázistér $(z, m) \Rightarrow$ spektrális kezelés
- "Fölszeleteljünk" a hullám aktivitást kis intervallumokra m -irányban \Rightarrow spektrális hullám aktivitás (energia)

$$\mathcal{N}(z, m, t) = \int_R \mathcal{A}_\alpha(z, t) \delta[m - m_\alpha(z, t)] d\alpha$$

- Euleri szemléletben

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\partial (c_{gz} \mathcal{N})}{\partial z} + \frac{\partial (\dot{m} \mathcal{N})}{\partial m} = 0$$

- ... ráadásul $\frac{\partial c_{gz}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial m} = 0$



(Muraschko et al., 2015)

- Megoldás: 2-D fázistér $(z, m) \Rightarrow$ spektrális kezelés
- "Fölszeleteljük" a hullám aktivitást kis intervallumokra m -irányban \Rightarrow spektrális hullám aktivitás (energia)

$$\mathcal{N}(z, m, t) = \int_R \mathcal{A}_\alpha(z, t) \delta[m - m_\alpha(z, t)] d\alpha$$

- Euleri szemléletben

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\partial (c_{gz} \mathcal{N})}{\partial z} + \frac{\partial (\dot{m} \mathcal{N})}{\partial m} = 0$$

- ... ráadásul $\frac{\partial c_{gz}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{m}}{\partial m} = 0$
- *Lagrange-i szemléletben*

$$\frac{\partial \mathcal{N}(z, m, t)}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial \mathcal{N}(z, m, t)}{\partial z} + \dot{m} \frac{\partial \mathcal{N}(z, m, t)}{\partial m} = 0$$

- Csatolt rendszer a fázistérben:

Hullám

$$\frac{d_r z}{dt} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \equiv c_{gz}$$

$$\frac{d_r m}{dt} = \mp \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{d u_b}{dz} \equiv \dot{m}$$

$$\frac{d_r \mathcal{N}}{dt} = 0 \quad \left(\frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} + \dot{m} \frac{\partial}{\partial m} \right)$$

Nagyskálájú "resolved" áramlás

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} \text{Re}(U_w W_w^*) \right]$$

$$= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (k c_{gz} \mathcal{A})$$

$$= -\frac{1}{\bar{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} k c_{gz} \mathcal{N}(z, m, t) dm$$

- Csatolt rendszer a fázistérben:

Hullám

Nagyskálájú "resolved" áramlás

$$\begin{aligned}
 \frac{d_r z}{dt} &= \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \equiv c_{gz} & \frac{\partial u_b}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} \text{Re}(U_w W_w^*) \right] \\
 \frac{d_r m}{dt} &= \mp \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{d u_b}{dz} \equiv \dot{m} & &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (k c_{gz} \mathcal{A}) \\
 \frac{d_r \mathcal{N}}{dt} &= 0 \quad \left(\frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} + \dot{m} \frac{\partial}{\partial m} \right) & &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} k c_{gz} \mathcal{N}(z, m, t) dm
 \end{aligned}$$

- \mathcal{N} megmaradó mennyiség a Lagrange-i trajektóriák mentén

- Csatolt rendszer a fázistérben:

Hullám

Nagyskálájú "resolved" áramlás

$$\begin{aligned} \frac{d_r z}{dt} &= \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \equiv c_{gz} & \frac{\partial u_b}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} \text{Re}(U_w W_w^*) \right] \\ \frac{d_r m}{dt} &= \mp \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{d u_b}{dz} \equiv \dot{m} & &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (k c_{gz} \mathcal{A}) \\ \frac{d_r \mathcal{N}}{dt} &= 0 \quad \left(\frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} + \dot{m} \frac{\partial}{\partial m} \right) & &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} k c_{gz} \mathcal{N}(z, m, t) dm \end{aligned}$$

- \mathcal{N} megmaradó mennyiség a Lagrange-i trajektóriák mentén
- több m érték is megengedett minden z magasságban \rightarrow spektrális (nem-monokromatikus) kezelés \rightarrow *nincs probléma a kausztikával és nincsenek numerikus problémák*

- Csatolt rendszer a fázistérben:

Hullám

$$\frac{d_r z}{dt} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \equiv c_{gz}$$

$$\frac{d_r m}{dt} = \mp \frac{k}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \frac{dN}{dz} - k \frac{d u_b}{dz} \equiv \dot{m}$$

$$\frac{d_r \mathcal{N}}{dt} = 0 \quad \left(\frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gz} \frac{\partial}{\partial z} + \dot{m} \frac{\partial}{\partial m} \right)$$

Nagyskálájú "resolved" áramlás

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} \text{Re}(U_w W_w^*) \right]$$

$$= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (k c_{gz} \mathcal{A})$$

$$= -\frac{1}{\bar{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} k c_{gz} \mathcal{N}(z, m, t) dm$$

- \mathcal{N} megmaradó mennyiség a Lagrange-i trajektóriák mentén
- több m érték is megengedett minden z magasságban \rightarrow spektrális (nem-monokromatikus) kezelés \rightarrow *nincs probléma a kausztikával és nincsenek numerikus problémák*
- *Muraschko et al., 2015: Boussinesq folyadék \Rightarrow kiterjesztés izotermikus légkörre, realiztikus sűrűségprofillal $\bar{\rho} = \rho(z) = \rho_0 e^{-z/H}$, $H = \frac{RT_0}{g}$*

(animáció: Mark Fruman)

(animáció: Mark Fruman)

- WKB elmélet (eddigiek) \Rightarrow *hullámtörést nem írja le*

- WKB elmélet (eddigiek) \Rightarrow hullámtörést nem írja le
- hullám törés ha a hullám sztatikusan instabillá válik (*Lindzen 1981*), azaz $\partial\theta_w/\partial z + d\bar{\theta}/dz < 0$ vagy megszorozva $g/\bar{\theta}$ -val

$$\frac{\partial b_w}{\partial z} + N^2 < 0$$

- WKB elmélet (eddigiek) \Rightarrow hullámtörést nem írja le
- hullám törés ha a hullám sztatikusan instabillá válik (*Lindzen 1981*), azaz $\partial\theta_w/\partial z + d\bar{\theta}/dz < 0$ vagy megszorozva $g/\bar{\theta}$ -val

$$\frac{\partial b_w}{\partial z} + N^2 < 0$$

- a WKB közelítéssel $b_w(x, z, t) = \text{Re} B_w(Z, T) e^{i\left[kx + \frac{\phi(Z, T)}{\epsilon}\right]}$ ahol $m = \partial\phi/\partial Z$ kapjuk, hogy

$$|m| |B_w| > N^2$$

- WKB elmélet (eddigiek) \Rightarrow hullámtörést nem írja le
- hullám törés ha a hullám sztatikusan instabillá válik (Lindzen 1981), azaz $\partial\theta_w/\partial z + d\bar{\theta}/dz < 0$ vagy megszorozva $g/\bar{\theta}$ -val

$$\frac{\partial b_w}{\partial z} + N^2 < 0$$

- a WKB közelítéssel $b_w(x, z, t) = \text{Re} B_w(Z, T) e^{i\left[kx + \frac{\phi(Z, T)}{\epsilon}\right]}$ ahol $m = \partial\phi/\partial Z$ kapjuk, hogy

$$|m| |B_w| > N^2$$

- ez a monokromatikus feltétel általánosítható (spektrális) m szerinti integrálással:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m|B_w|)^2 dm = \int_{-\infty}^{\infty} m^2 f(\mathcal{N}) dm > \alpha^2 N^4$$

ahol α méri a feltétel bizonytalanságát

- WKB elmélet (eddigiek) \Rightarrow hullámtörést nem írja le
- hullám törés ha a hullám sztatikusan instabillá válik (Lindzen 1981), azaz $\partial\theta_w/\partial z + d\bar{\theta}/dz < 0$ vagy megszorozva $g/\bar{\theta}$ -val

$$\frac{\partial b_w}{\partial z} + N^2 < 0$$

- a WKB közelítéssel $b_w(x, z, t) = \text{Re} B_w(Z, T) e^{i\left[kx + \frac{\phi(Z, T)}{\epsilon}\right]}$ ahol $m = \partial\phi/\partial Z$ kapjuk, hogy

$$|m| |B_w| > N^2$$

- ez a monokromatikus feltétel általánosítható (spektrális) m szerinti integrálással:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m |B_w|)^2 dm = \int_{-\infty}^{\infty} m^2 f(\mathcal{N}) dm > \alpha^2 N^4$$

ahol α méri a feltétel bizonytalanságát

- Ha az instabilitás feltétele teljesül, az \mathcal{N} hullám energiát csökkentjük, hogy a sztatikus egyensúly visszaálljon



(www.publicdomainpictures.net)

Módszertan

- LES: nem-lineáris nagyfelbontású "wave resolving" szimuláció (PincFloit, *Rieper et al.*, 2013)
- WKB-eu: Euleri WKB modell
- WKB-la: Lagrange-i WKB modell

Módszertan

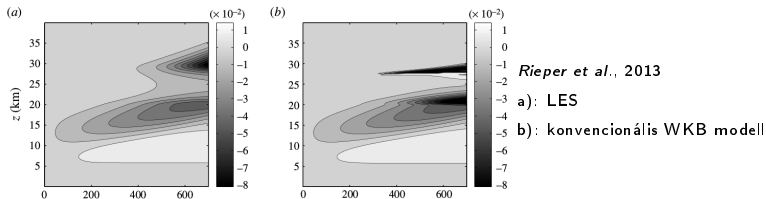
- LES: nem-lineáris nagyfelbontású "wave resolving" szimuláció (PincFloit, Rieper et al., 2013)
- WKB-eu: Euleri WKB modell
- WKB-la: Lagrange-i WKB modell

Idealizált kísérletek

- jet okozta elhajlás: U_{jet} gyenge $\Rightarrow m, c_{gz}$ enyhén változik
- jet okozta visszaverődés: $U_{jet} \geq \frac{N}{k} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right) \Rightarrow m$ és c_{gz} előjelet vált
- sztatikus instabilitás: nagy kezdeti amplitúdó \Rightarrow instabilitás
- modulációs instabilitás: $|m| \approx |k| \Rightarrow$ hullámcsomag elkeskenyedik, amplitúdó nő \rightarrow sztatikus instabilitás
- kritikus réteg: $U_{jet} \approx -c_p \Rightarrow m$ végtelenbe nő, a hullámcsomag "összeomlik"

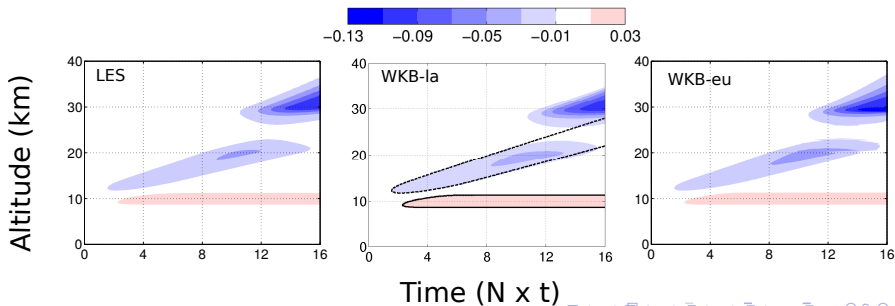
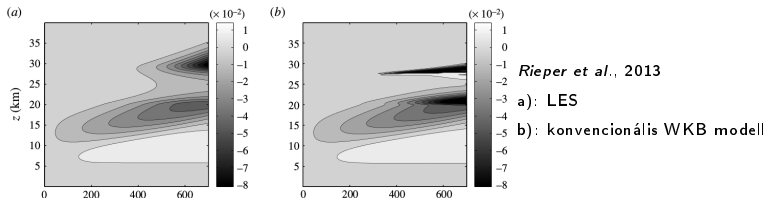
Numerikus vizsgálatok

Hullám keltette szél, jet okozta elhajlás ($\lambda_x = 10km, \lambda_z = 1km$)



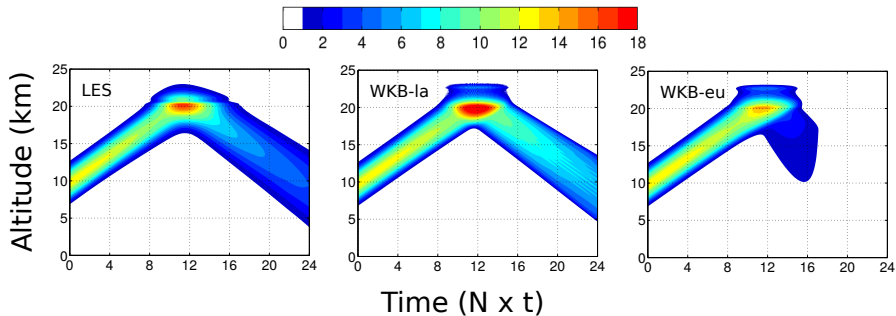
Numerikus vizsgálatok

Hullám keltette szél, jet okozta elhajlás ($\lambda_x = 10\text{km}$, $\lambda_z = 1\text{km}$)



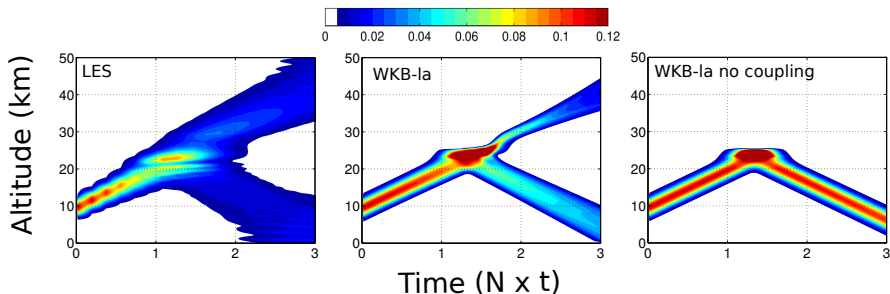
Numerikus vizsgálatok

Hullám energia, jet okozta visszaverődés ($\lambda_x = 10\text{km}$, $\lambda_z = 1\text{km}$)



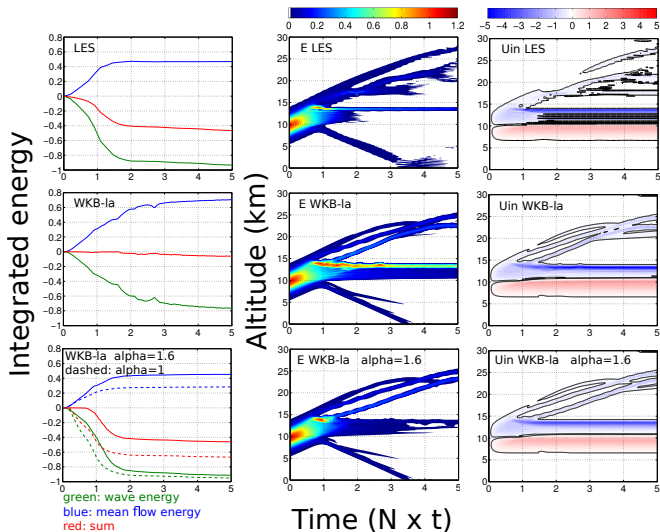
Numerikus vizsgálatok

Hullám energia, jet okozta *részleges* visszaverődés ($\lambda_x = 6km, \lambda_z = 3km$)



Numerikus vizsgálatok

Sztatikus instabilitás ($\lambda_x = \lambda_z = 1km$)



Összefoglalás, kitekintés

- **A kausztika problémáját feloldottuk:** az LES-el való összehasonlítások azt mutatják, hogy a WKB modell a fázistér reprezentációval jól működik nem csak Boussinesq közegben (*Muraschko et al.*, 2015) hanem **izotermikus légkörben** is.

Összefoglalás, kitekintés

- **A kausztika problémáját feloldottuk:** az LES-el való összehasonlítások azt mutatják, hogy a WKB modell a fázistér reprezentációval jól működik nem csak Boussinesq közegben (*Muraschko et al.*, 2015) hanem **izotermikus légkörben** is.
- **A Lagrange-i WKB modell numerikusan "elégg" hatékony:** 10-100-szor gyorsabb az Euleri modellnél és 1000-10000-szor gyorsabb a "wave resolving" LES szimulációknál \Rightarrow a Lagrange-i modellel dolgozunk tovább

Összefoglalás, kitekintés

- **A kausztika problémáját feloldottuk:** az LES-el való összehasonlítások azt mutatják, hogy a WKB modell a fázistér reprezentációval jól működik nem csak Boussinesq közegben (*Muraschko et al.*, 2015) hanem **izotermikus légkörben** is.
- **A Lagrange-i WKB modell numerikusan "elégé" hatékony:** 10-100-szor gyorsabb az Euleri modellnél és 1000-10000-szor gyorsabb a "wave resolving" LES szimulációknál \Rightarrow a Lagrange-i modellel dolgozunk tovább
- **A Lagrange-i WKB modellt kiegészítettük egy hullámtörés parametrizációval,** amely mérsékelten javítja az egyezést az LES szimulációkkal

Összefoglalás, kitekintés

- **A kausztika problémáját feloldottuk:** az LES-el való összehasonlítások azt mutatják, hogy a WKB modell a fázistér reprezentációval jól működik nem csak Boussinesq közegben (*Muraschko et al.*, 2015) hanem **izotermikus légkörben** is.
- **A Lagrange-i WKB modell numerikusan "elégg" hatékony:** 10-100-szor gyorsabb az Euleri modellnél és 1000-10000-szor gyorsabb a "wave resolving" LES szimulációknál \Rightarrow a Lagrange-i modellel dolgozunk tovább
- **A Lagrange-i WKB modellt kiegészítettük egy hullámtörés parametrizációval**, amely mérsékeltén javítja az egyezést az LES szimulációkkal
- **Azonban! a WKB modell hullámtörés nélkül is meglepően jó eredményt ad** \rightarrow NEM a hullámtörés a legfontosabb folyamat a hullám és a nagyskálájú áramlás kölcsönhatását tekintve, hanem a gyengén nem-lineáris kölcsönhatás a hullám és a nagyskálájú áramlás közt.

Összefoglalás, kitekintés

- **A kausztika problémáját feloldottuk:** az LES-el való összehasonlítások azt mutatják, hogy a WKB modell a fázistér reprezentációval jól működik nem csak Boussinesq közegben (*Muraschko et al.*, 2015) hanem **izotermikus légkörben** is.
- **A Lagrange-i WKB modell numerikusan "elégg" hatékony:** 10-100-szor gyorsabb az Euleri modellnél és 1000-10000-szor gyorsabb a "wave resolving" LES szimulációknál \Rightarrow a Lagrange-i modellel dolgozunk tovább
- **A Lagrange-i WKB modellt kiegészítettük egy hullámtörés parametrizációval**, amely mérsékeltén javítja az egyezést az LES szimulációkkal
- **Azonban! a WKB modell hullámtörés nélkül is meglepően jó eredményt ad** \rightarrow NEM a hullámtörés a legfontosabb folyamat a hullám és a nagyskálájú áramlás kölcsönhatását tekintve, hanem a gyengén nem-lineáris kölcsönhatás a hullám és a nagyskálájú áramlás közt.
- **Érdekes felülvizsgálni a "non-interaction" elméletet**, amelyen a jelelegi parametrizációk alapulnak és megpróbálni a fenti **csatolt** parametrizációt egy GCM-ben (ICON modell)

Köszönöm a figyelmet!



Achatz, U., R. Klein, F. Senf (2010), Gravity waves, scale asymptotics, and the pseudo-incompressible equations. *J. Fluid Mech.*, 141(663), 120–147, DOI:10.1017/S0022112010003411

Kim, Y-J, Eckermann D. S., Chun H-Y. (2003), An Overview of the Past, Present and Future of Gravity-Wave Drag Parametrization for Numerical Climate and Weather Prediction Models *Atmos.-Ocean*, 41, 65–98, DOI: 10.3137/ao.410105

Lindzen (1981), Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown. *J. Geophys. Res.*, 86, 9707–9714

Muraschko, J., M. D. Fruman, U. Achatz, S. Hickel and Y. Toledo (2014), On the application of Wentzel-Kramer-Brillouin theory for the simulation of the weakly nonlinear dynamics of gravity waves, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 141(688), 676–697, DOI:10.1002/qj.2381.

Rieper, F., S. Hickel and U. Achatz (2013), A Conservative Integration of the Pseudo-Incompressible Equations with Implicit Turbulence Parameterization *Mon. Wea. Rev.*, 141(3), 861–886, DOI:10.1175/MWR-D-12-00026.1.

Rieper, F., U. Achatz and R. Klein (2013), Range of validity of an extended WKB theory for atmospheric gravity waves: one-dimensional and two-dimensional case *J. Fluid Mech.*, 729, 330–363, DOI:10.1017/jfm.2013.307.

Experiment	Wavepacket	Background	Domain size	Resolution
REFR Refraction by a jet	Cosine shape $\lambda_x = 10km, \lambda_z = 1km$ $k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$ $z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 10km$ $branch = -1, a_0 = 0.1$	non-Boussinesq $T = 300K$ $N \approx 0.018$ $u_0 = 5m/s$ $z_a = 25km$ $\Delta_a = 10km$	WKB Euler: $L_z = 40km$ $m \in [0.001, 0.008]$ WKB Lagrange: $L_z = 40km$ LES: $L_z = 40km, L_x = 10km$	WKB Euler: $n_z = 400, nm = 70$ $dz \approx 100m, dm = 10^{-4}s^{-1}$ WKB Lagrange: $n_z = 400, dz_{smooth} \approx 600m$ $dz \approx 100m, n_{ray} = 4000$ LES: $n_z = 1280, nx = 32$ $dz \approx 31m, dx = 310m$
REFL Reflection from a jet	Cosine shape $\lambda_x = 10km, \lambda_z = 1km$ $k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$ $z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 10km$ $branch = -1, a_0 = 0.1$	non-Boussinesq $T = 300K$ $N \approx 0.018$ $u_0 = 40m/s$ $z_a = 25km$ $\Delta_a = 10km$	WKB Euler: $L_z = 40km$ $m \in [-0.01, 0.008]$ WKB Lagrange: $L_z = 40km$ LES: $L_z = 40km, L_x = 10km$	WKB Euler: $n_z = 400, nm = 180$ $dz \approx 100m, dm = 10^{-4}s^{-1}$ WKB Lagrange: $n_z = 400, dz_{smooth} \approx 600m$ $dz \approx 100m, n_{ray} = 4000$ LES: $n_z = 2500, nx = 64$ $dz \approx 16m, dx = 156m$
PREFL Partial Reflection from a jet	Cosine shape $\lambda_x = 6km, \lambda_z = 3km$ $k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$ $z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 10km$ $branch = -1, a_0 = 0.1$	non-Boussinesq $T = 300K$ $N \approx 0.018$ $u_0 = 9,75m/s$ $z_a = 25km$ $\Delta_a = 10km$	WKB Lagrange: $L_z = 50km$ LES: $L_z = 50km, L_x = 6km$	WKB Lagrange: $n_z = 166, dz_{smooth} \approx 1800m$ $dz \approx 300m, n_{ray} = 4320$ LES: $n_z = 538, nx = 32$ $dz \approx 93m, dx = 187m$

STIH	Gaussian shape	non-Boussinesq	WKB Lagrange:	WKB Lagrange:
Static	$\lambda_x = 30km, \lambda_z = 3km$	$T = 300K$	$L_c = 80km$	$nz = 266, dz_{smooth} \approx 1800m$
Instability	$k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$	$N \approx 0.018$		$dz \approx 300m, n_{ray} = 4320$
Hydrostatic	$z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 25km$		LES:	LES:
Wavepacket	$branch = -1, a_0 = 0.5$		$L_c = 80km, L_x = 30km$	$nz = 854, nx = 32$ $dz \approx 94m, dx \approx 940m$
STINH	Gaussian shape	non-Boussinesq	WKB Lagrange:	WKB Lagrange:
Static	$\lambda_x = 1km, \lambda_z = 1km$	$T = 300K$	$L_c = 30km$	$nz = 300, dz_{smooth} \approx 600m$
Instability	$k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$	$N \approx 0.018$		$dz \approx 100m, n_{ray} = 4000$
Non-hydrostatic	$z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 10km$		LES:	LES:
Wavepacket	$branch = -1, a_0 = 0.9$		$L_c = 30km, L_x = 1km$	$nz = 960, nx = 32$ $dz \approx 31m, dx \approx 310m$
MI	Cosine shape	non-Boussinesq	WKB Lagrange:	WKB Lagrange:
Modulational	$\lambda_x = 1km, \lambda_z = 1km$	$T = 300K$	$L_c = 60km$	$nz = 600, dz_{smooth} \approx 600m$
Instability	$k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$	$N \approx 0.018$		$dz \approx 100m, n_{ray} = 4000$
	$z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 20km$		LES:	LES:
	$branch = -1, a_0 = 0.1$		$L_c = 60km, L_x = 1km$	$nz = 1920, nx = 32$ $dz \approx 31m, dx \approx 310m$
CL	Cosine shape	non-Boussinesq	WKB Lagrange:	WKB Lagrange:
Critical	$\lambda_x = 10km, \lambda_z = 1km$	$T = 300K$	$L_c = 30km$	$nz = 300, dz_{smooth} \approx 600m$
Layer	$k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$	$N \approx 0.018$		$dz \approx 100, n_{ray} = 4000$
	$z_0 = 10km, \Delta_{wp} = 10km$	$u_0 = -11m/s$	LES:	LES:
	$branch = -1, a_0 = 0.1$	$z_u = 25km$	$L_c = 30km, L_x = 10km$	$nz = 960, nx = 32$ $dz \approx 31m, dx \approx 310m$
		$\Delta_u = 10km$		