

# **Kaotikus sodródás a légkörben: a RePLaT lagrange-i terjedési modell**

---

*Haszpra Tímea*

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
MTA–ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

2014. január 22. OMSZ

# Légköri szennyeződések

- vulkánkitörések, légszennyezés → légköri áramlások → sodródás, keveredés, ülepedés
- *Eyjafjallajökull* (Izland) 2010. tavasz
- *Fukushima* (Japán) 2011. tavasz
- ... stb.
- a szennyeződések a forrástól távolabbra is eljuthatnak





# Terjedési modellek

- *euleri modellek*: Földhöz rögzített koordinátarendszerben, rácshálózaton
- *lagrange-i modellek*: trajektóriák (részecskék/pöff/levegőcella)
  - „álrészecskék” (számítási részecskék)
    - a pontszerű részecskék a szélmezővel sodródnak
    - a részecskékhez mesterséges tömeg tartozik (pl. 1 kg), időben változik → a tömeg az ülepedéssel exponenciálisan csökken:  $\Delta m/\Delta t = -C \cdot m$
    - gravitációs ülepedés?
    - pl.: FLEXPART, HYSPLIT, NAME, SNAP, GEARN, MLDP0



# Terjedési modellek

- *lagrange-i modellek*: trajektóriák (részecskék/pöff/levegőcella)

- valódi részecskék

- a részecskéknek valóságnak megfelelő méret és sűrűség (tömeg) tartozik  
pl.  $r = 1 \mu\text{m}$ ,  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$
- a részecskék mozgását a légköri áramlások és a határsebesség adja meg
- pl.: PUFF, VAFTAD
- vulkáni hamu terjedésének gyors előrejelzésére
- nincs csapadék általi kimosódás és esetleg turbulens diffúzió sem



# RePLaT modell

(Real Particle Lagrangian Trajectory modell)

- valódi részecskéket követő lagrange-i terjedési modell
  - valóságnak megfelelő  $\rho$  sűrűségű és  $r$  sugarú aeroszol részecskék
  - + csapadék általi kimosódás és turbulens diffúzió
  - részecskék mozgása Newton-egyenletből következik:

$$\frac{dx}{dt} = u_{\text{air}}(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{\text{air}}(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w_{\text{air}}(x(t), y(t), z(t), t) + w_{\text{term}}$$

$$\text{Re} = \frac{2r |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{air}}|}{\nu} \quad \text{Reynolds-szám}$$

$\nu$  kinematikai viszkozitás

$C_d$  alaktényező

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} + m\mathbf{g} = 0$$

határ-  
sebesség  $w_{\text{term}} = \begin{cases} -\frac{2}{9} \frac{\rho r^2 g}{\rho_{\text{air}} \nu}, \text{ ha } \text{Re} \ll 1 \\ -\sqrt{\frac{8}{3} \frac{\rho r g}{\rho_{\text{air}} C_d}}, \text{ ha } \text{Re} \gg 1 \end{cases}$

← Stokes-törvényből  
(aeroszol részecskék,  $r = 1-10 \mu\text{m}$ )

← négyzetes közegellenállás  
(esőcseppek)



# RePLaT modell

(Real Particle Lagrangian Trajectory modell)

- turbulens diffúzió szerepe → véletlen bolyongás

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_{\text{air}}(x(t), y(t), z(t), t) \\ \frac{dy}{dt} &= v_{\text{air}}(x(t), y(t), z(t), t) \\ \frac{dz}{dt} &= w_{\text{air}}(x(t), y(t), z(t), t) + w_{\text{term}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z) \\ \mathbf{v}_{\text{air}} &= (u_{\text{air}}, v_{\text{air}}, w_{\text{air}}) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}_{\text{air}} + w_{\text{term}} \mathbf{n} \\ &\quad (\mathbf{n}: \text{függőleges egységvektor}) \end{aligned}$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{air}} + w_{\text{term}} \mathbf{n} + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

$\boldsymbol{\xi}$       fehérzaj  
 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$     turbulens diffúzió

$K_x, K_y = \text{állandó}, K_z$ : Monin–Obukhov-elmélet

# RePLaT modell

(Real Particle Lagrangian Trajectory modell)

- nedves ülepedés

euleri szemléletben:

$$\frac{dn}{dt} = -k_w n$$

$$\frac{n(\Delta t)}{n(0)} = \exp(-k_w \Delta t) \leftarrow \text{bent}$$

$$1 - \frac{n(\Delta t)}{n(0)} = 1 - \exp(-k_w \Delta t) \leftarrow \text{kiesik}$$

$k_w, r_{\text{rain}}$ :  $P$  csapadékintenzitástól függ

$$\rho_{\text{rain}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

csapadék szerepe: 850 hPa alatt

$n$  koncentráció

$k_w$  nedves ülepedési együttható,  
kimosódási együttható

egy részecske  
 $p = 1 - \exp(-k_w \Delta t)$   
valószínűséggel  
esőcseppbe kerül

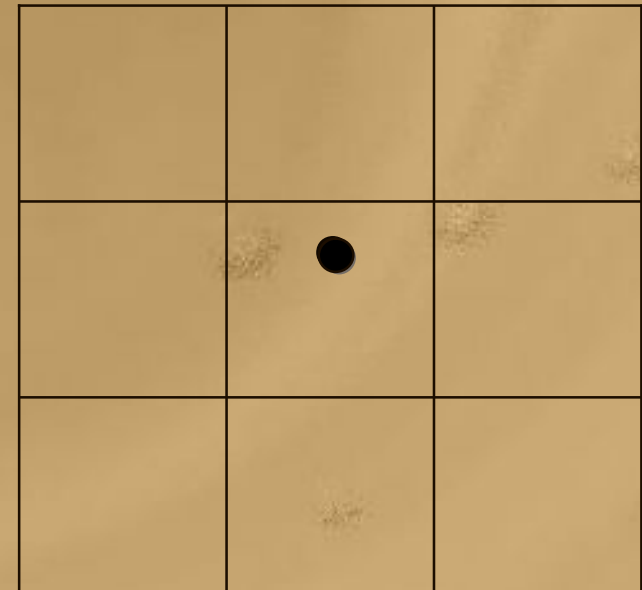
$\rightarrow r = r_{\text{rain}}, \rho = \rho_{\text{rain}}$   
 $\rightarrow w'_{\text{term}} \gg w_{\text{term}}$

# Adatok, módszerek

- szélmező és egyéb adatok:
  - ERA Interim adatbázisból (ECMWF):  
0,5 °×0,5° vagy 1,5°×1,5°, 6 óra



- mozgásegyenletek  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $p$  változókkal
- interpoláció a részecskék helyére
  - vízszintesen: biköbös spline
  - függőlegesen és időben: lineáris
- differenciálegyenletek numerikus megoldása Euler-módszerrel





# Mozgásegyenletek

[Visser (1997)]

$$\lambda(t + \Delta t) = \lambda(t) + \frac{u_{\text{air}}}{R_E \cos \varphi} \Delta t + \xi \sqrt{24K_\lambda \Delta t}$$

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \frac{v_{\text{air}}}{R_E} \Delta t + \xi \sqrt{24K_\varphi \Delta t}$$

$$p(t + \Delta t) = p(t) + (\omega_{\text{air}} + \omega_{\text{term}}) \Delta t + \xi \sqrt{24K_p \Delta t} + \frac{\partial K_p}{\partial p} \Delta t$$

$$K_\lambda = \frac{K_x}{(R_E \cos \varphi_p)^2}$$

$$K_\varphi = \frac{K_y}{(R_E)^2}$$

$\xi$ :  $[-0,5; 0,5]$  egyenletes eloszlás

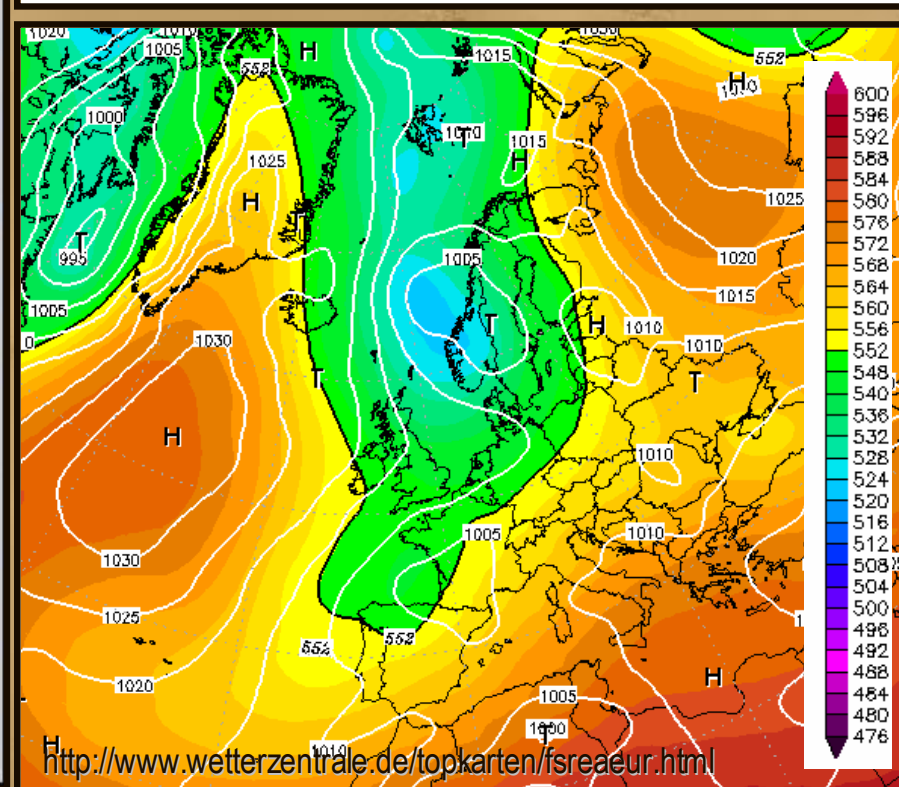
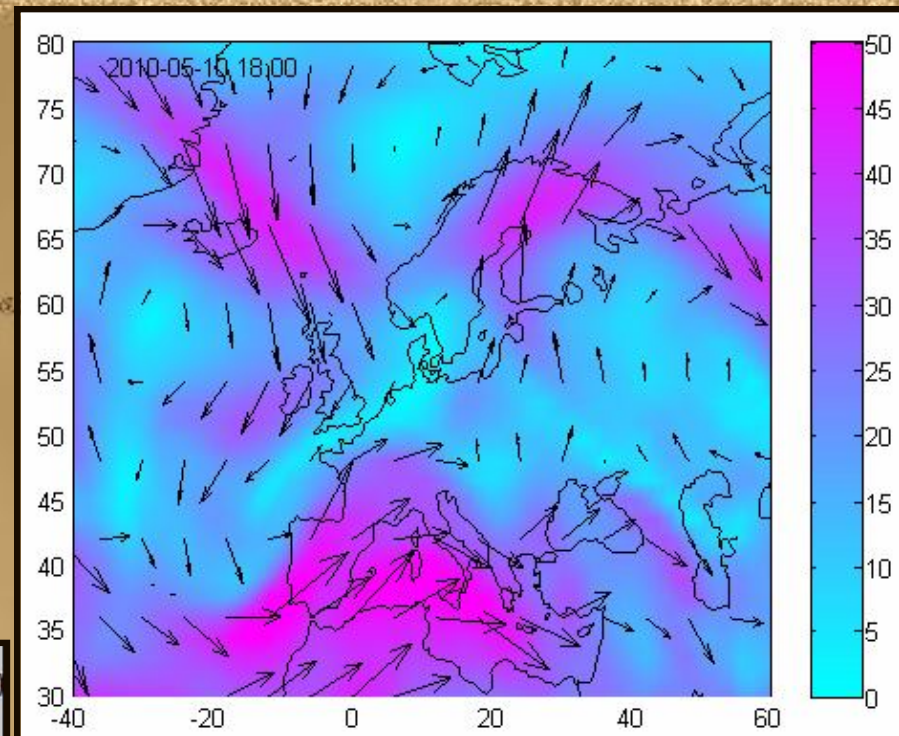
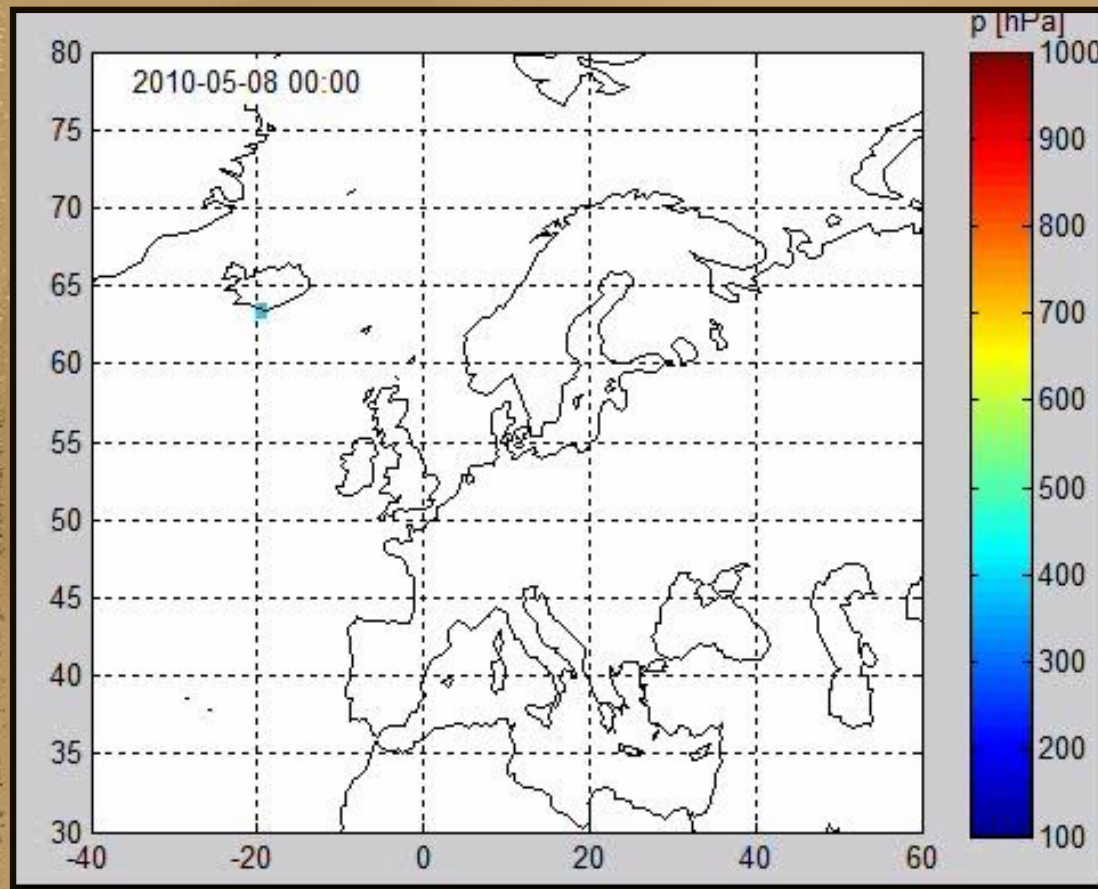
$K_x, K_y$ : állandó vízszintes turb. diff. együtthatók

$K_p \leftarrow K_z$ : Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet

# Esettanulmányok

# Eyjafjallajökull- szimuláció (2010. május 8–19.)

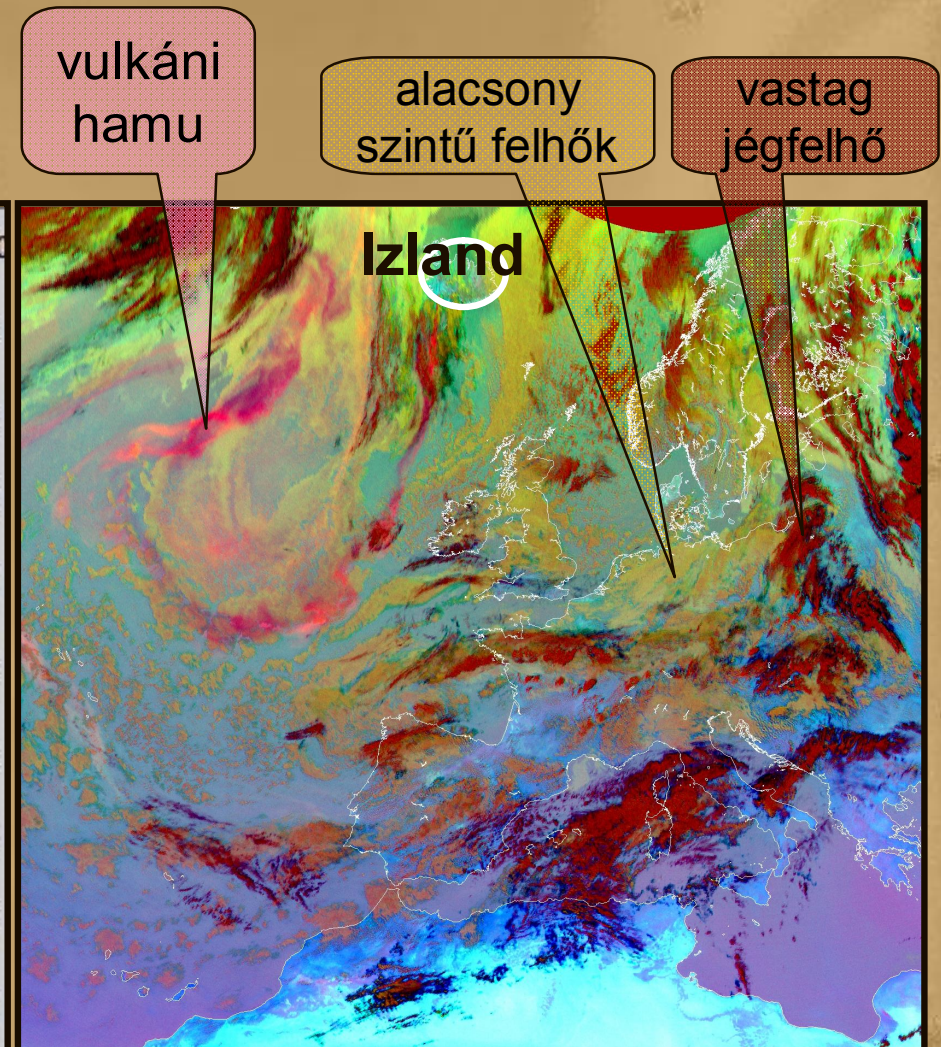
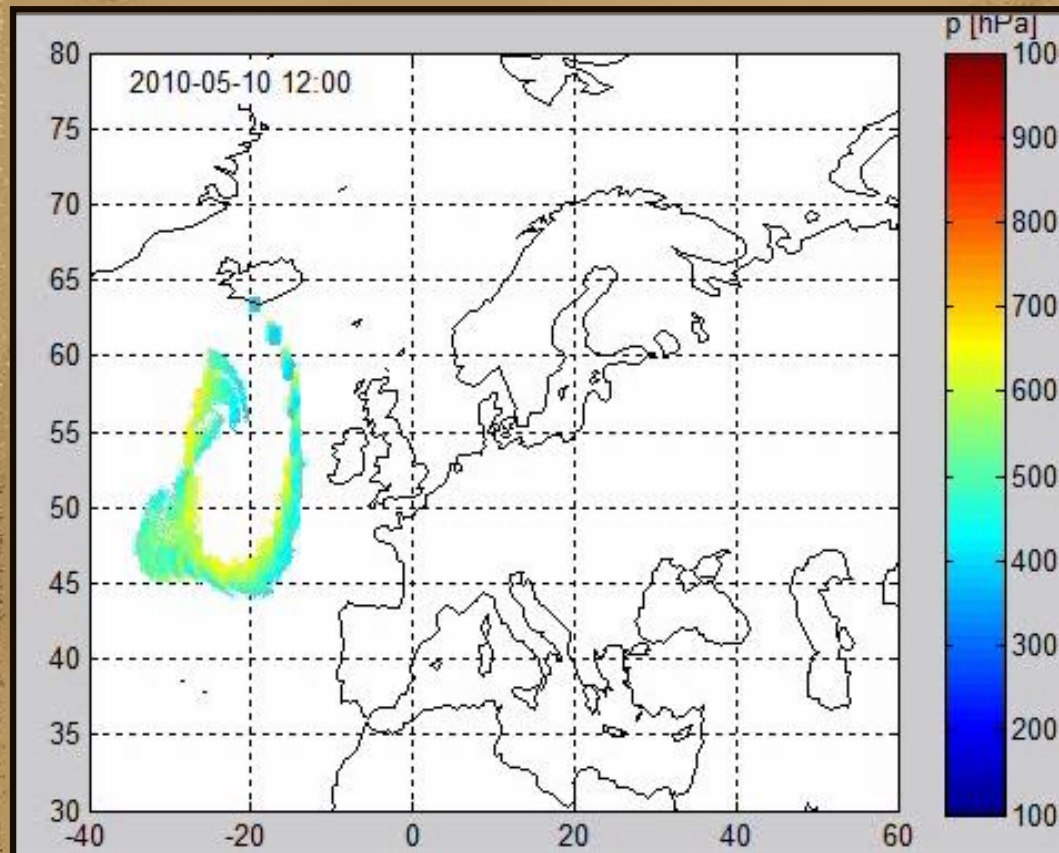
$r = 1 \mu\text{m}$ ,  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$   
 $n = 70 \cdot 1000 \text{ db}$





# Eyjafjallajökull-szimuláció (2010. május 8–19.)

- összehasonlítás műholdas megfigyelésekkel

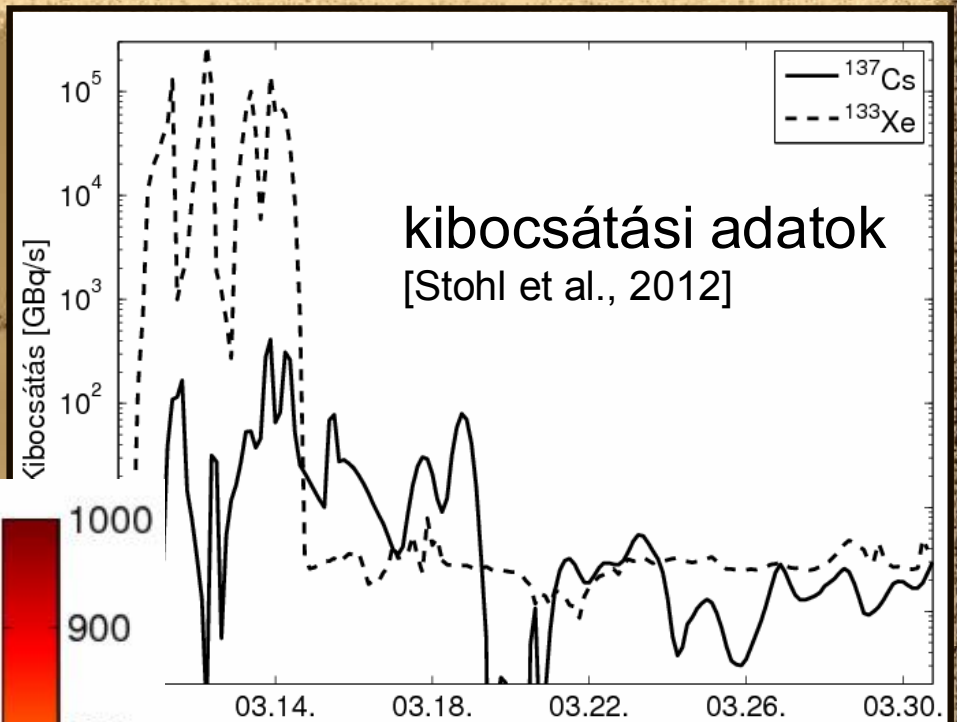
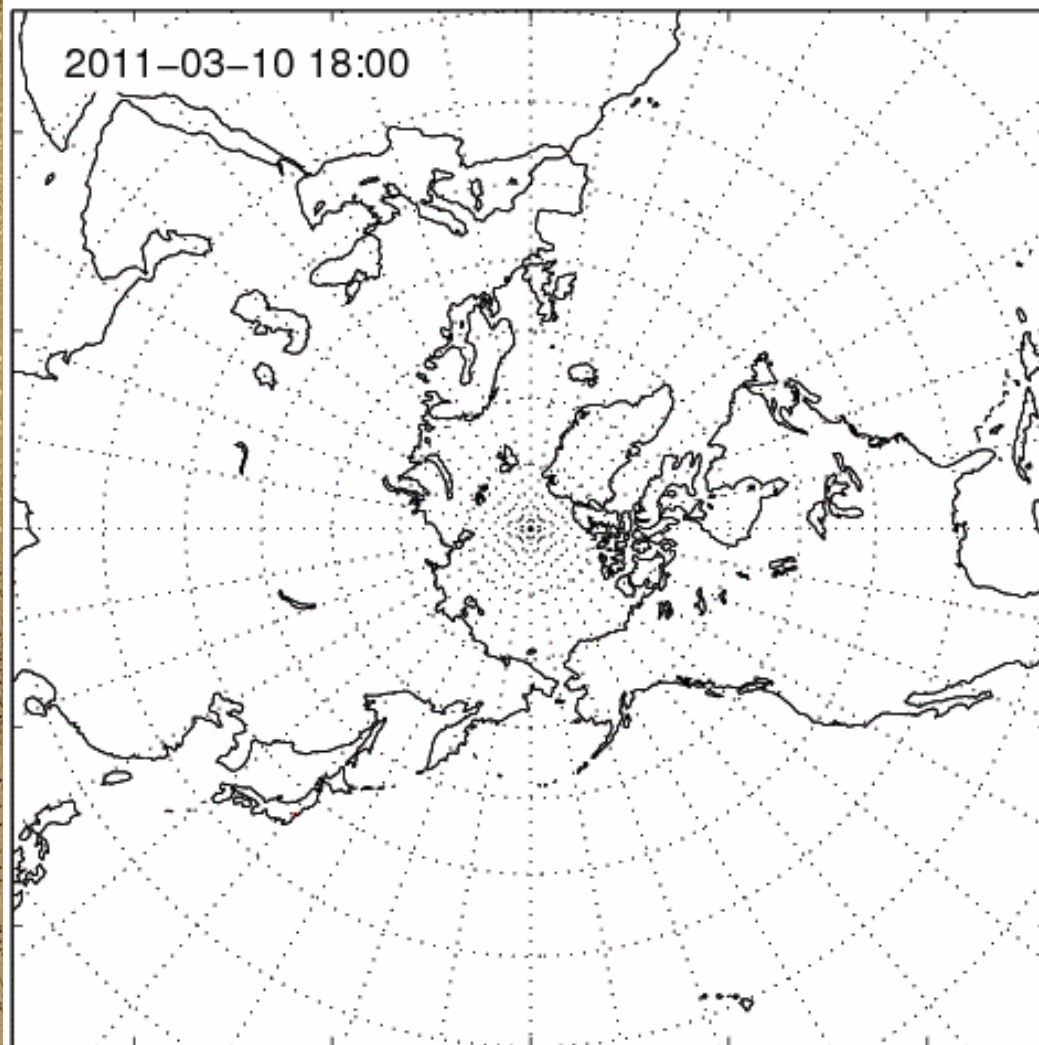


[[http://www.eumetsat.int/Home/Main/Image\\_Gallery/Topical\\_Images/index.htm?|=en](http://www.eumetsat.int/Home/Main/Image_Gallery/Topical_Images/index.htm?|=en)]



# Fukushima- szimuláció

(2011. márc. 10–30.)



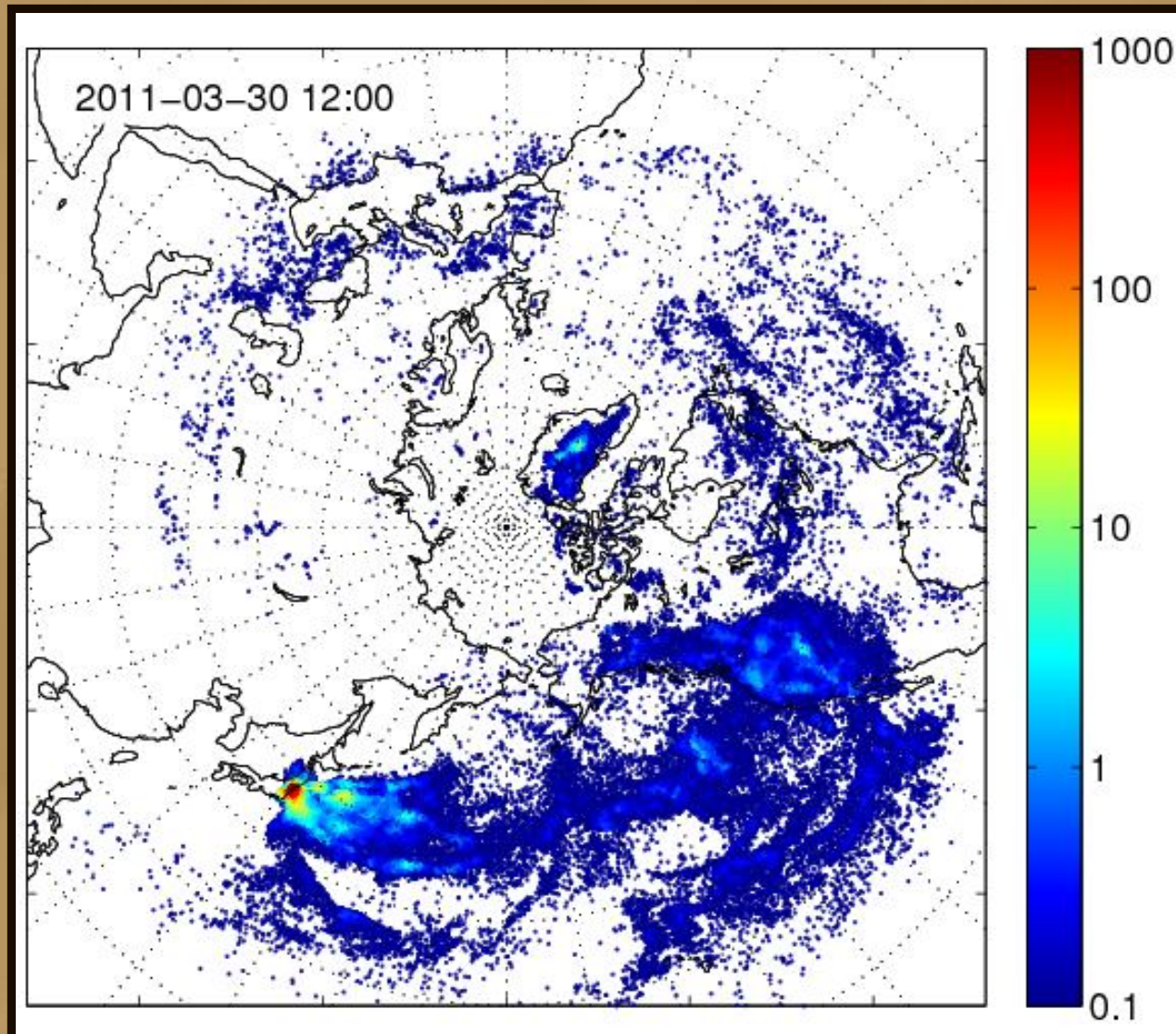
<sup>137</sup>Cs izotóp ( $\tau = 30$  év)

$r = 0,2 \mu\text{m}$ ,  $\rho = 1900 \text{ kg/m}^3$

$n = 10^6$  db

# Fukushima-szimuláció

(2011. márc. 10–30.)

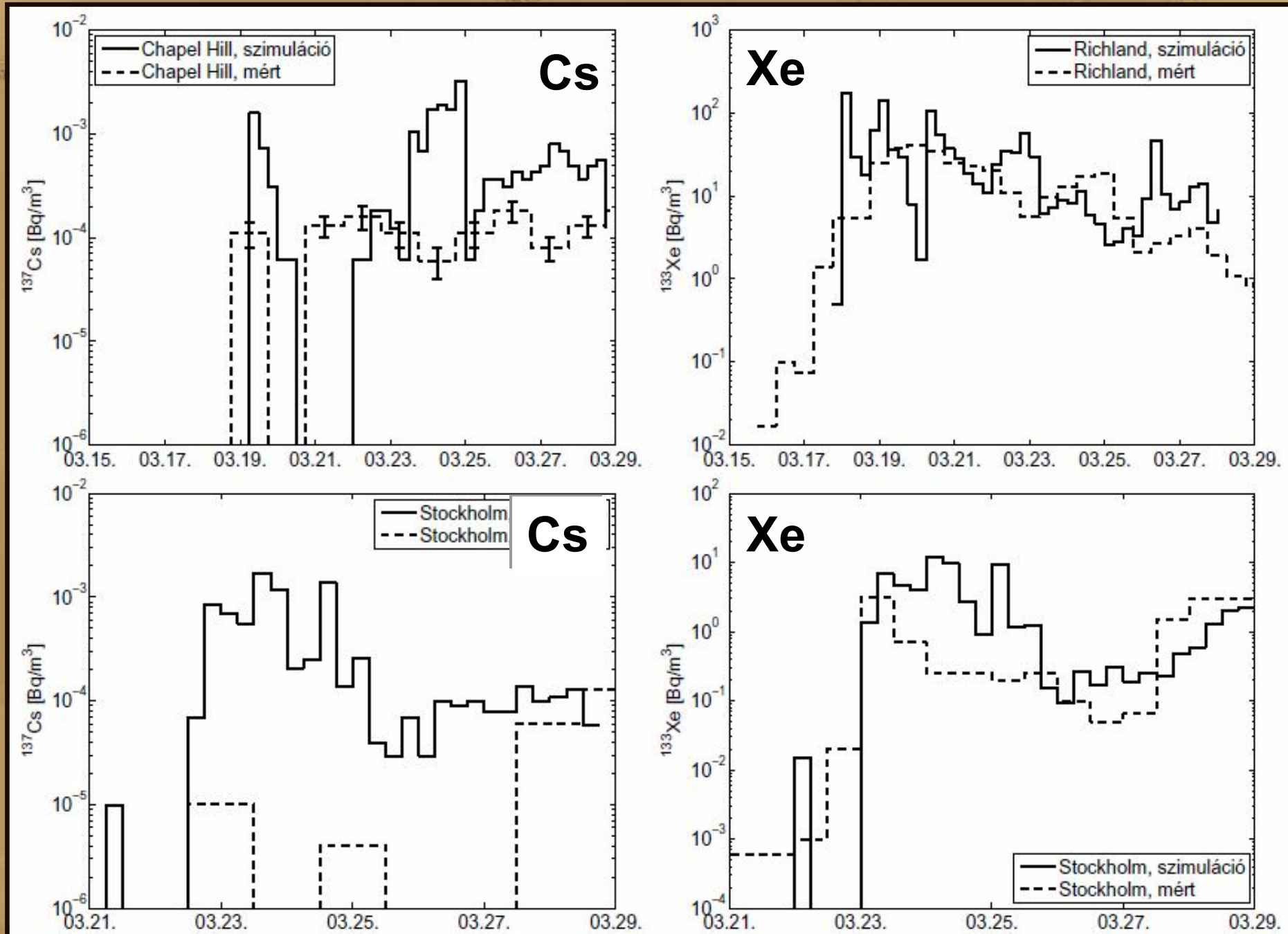


$^{137}\text{Cs}$  ülepedési mező  
[ $\text{kBq/m}^2$ ]  
március 10–30.



# Fukushima-szimuláció

Az eredmények összevetése  
mérési adatokkal

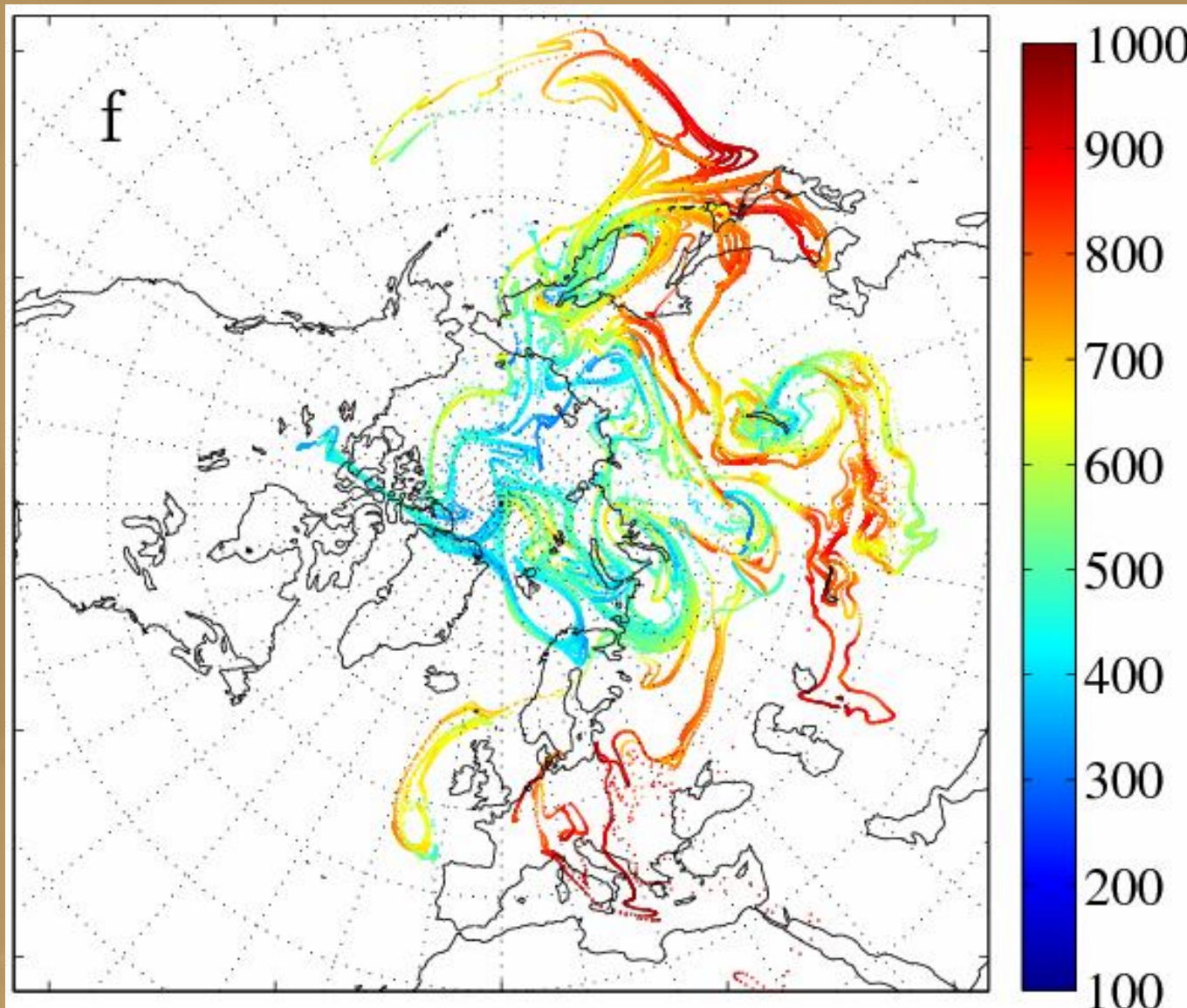


# **A kaotikus sodródás jellemzői a légkörben**



# A szennyeződésfelhők nyúlása

Esettanulmány (0, 2, 4, 6, 8, 10 nap)



$L_0 = 3^\circ \approx 333$  km  
meridionális vonal-  
darab

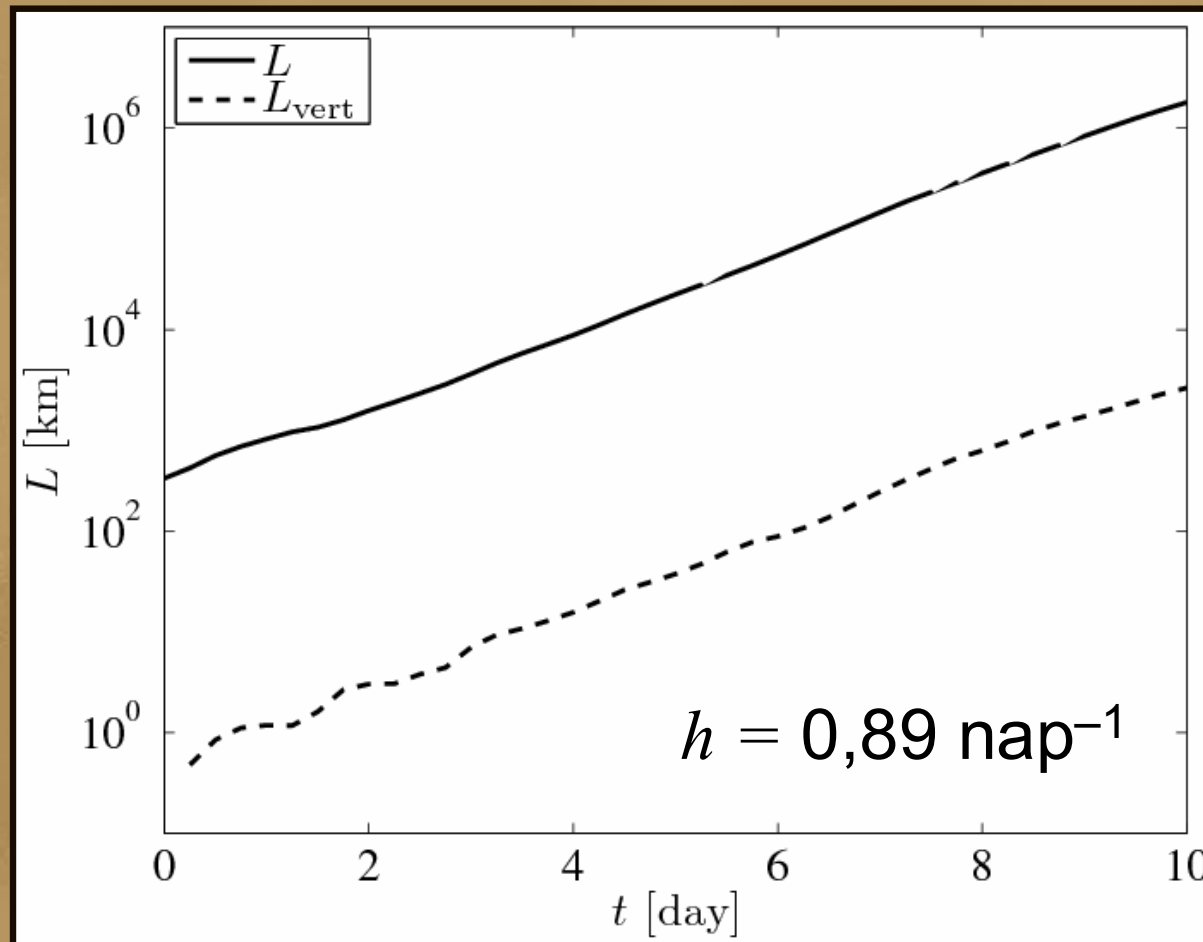
$n_0 = 2 \cdot 10^5$  részecske  
 $r = 0$  (gáz, kicsiny  
részecskék)

**szimulációk:**

- nincs turb. diff.
- nincs csapadék



# Topologikus entrópia ( $h$ )



- erősen nyúlik
- vonaldarab hossza:

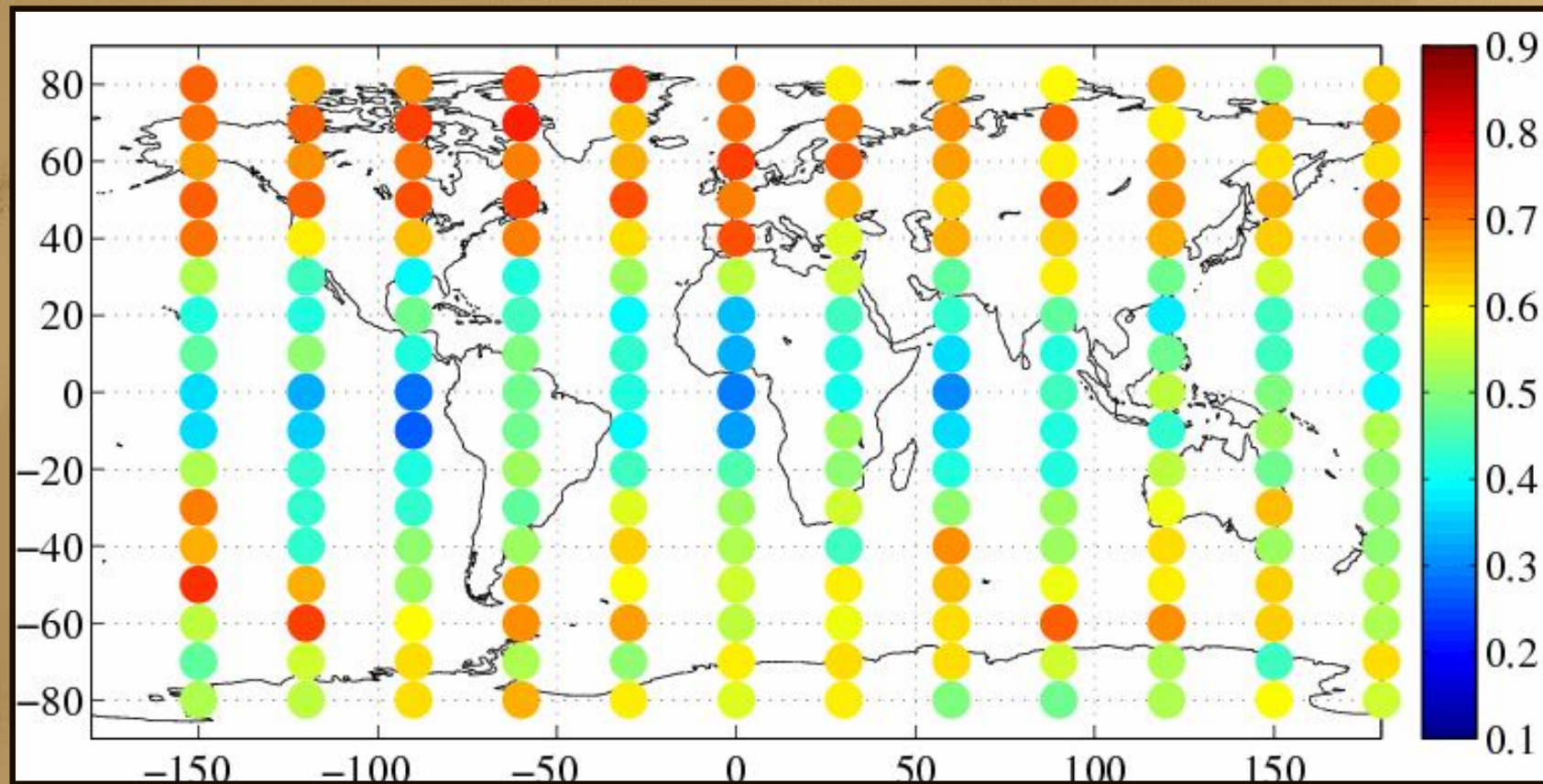
$$L(t) \sim \exp(ht)$$

- $h$ : topologikus entrópia
- a kaotikus viselkedés mérőszáma: a bonyolultság, szabálytalanság mértéke
- óceánban hasznosnak bizonyult [Thiffeault, 2010]

- a Ljapunov-exponenshez hasonló mennyiség, és  $h \geq \lambda$

# Topologikus entrópia ( $h$ )

## Földrajzi és évszakos eloszlás



**DECEMBER-FEBRUÁR**

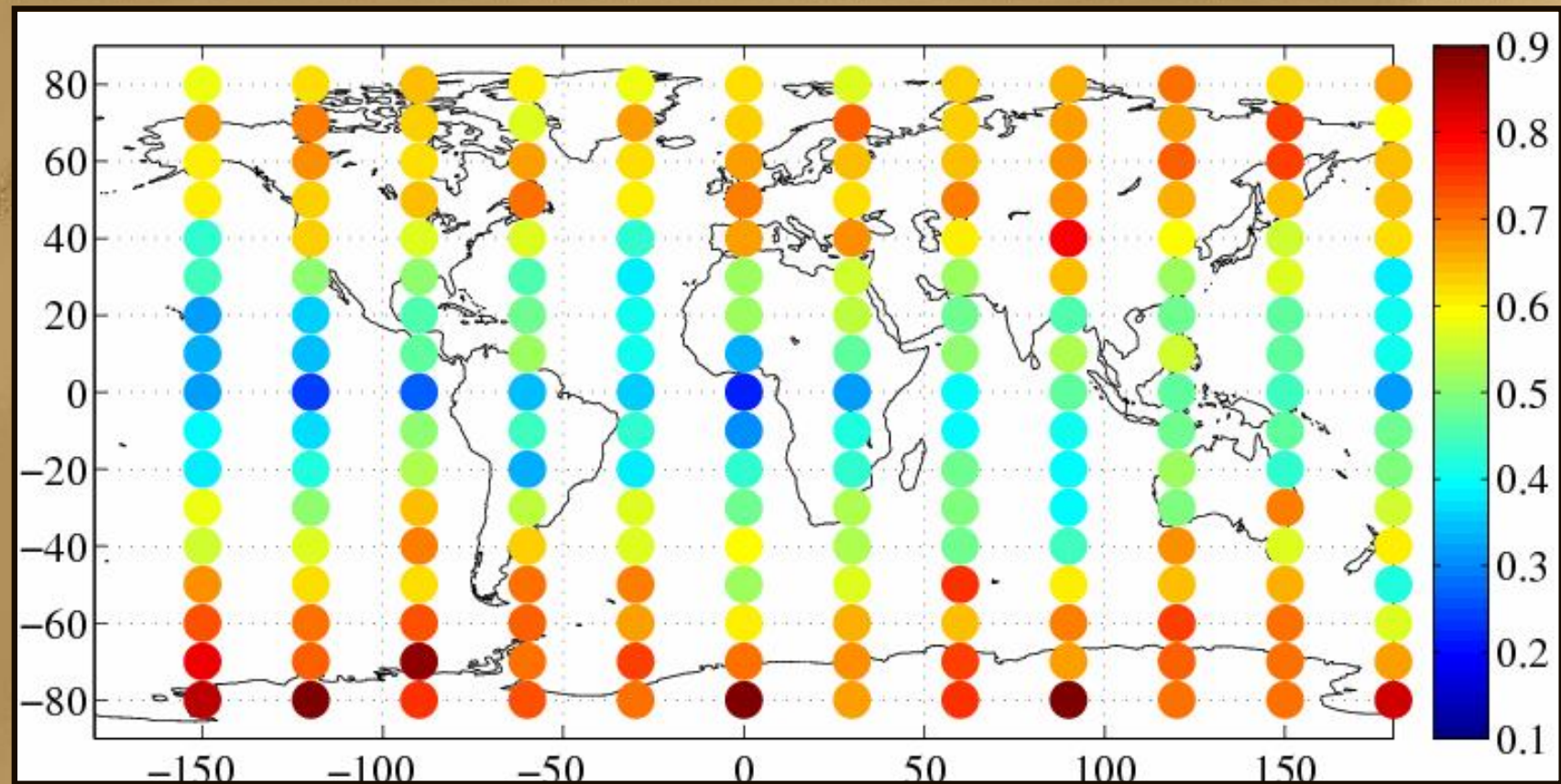
$h$  [nap<sup>-1</sup>] átlag

$p = 500$  hPa,  $r = 0$   $\mu$ m,  $L_0 = 3^\circ$



# Topologikus entrópia ( $h$ )

## Földrajzi és évszakos eloszlás



**JÚNIUS–AUGUSZTUS**

$h$  [nap<sup>-1</sup>] átlag

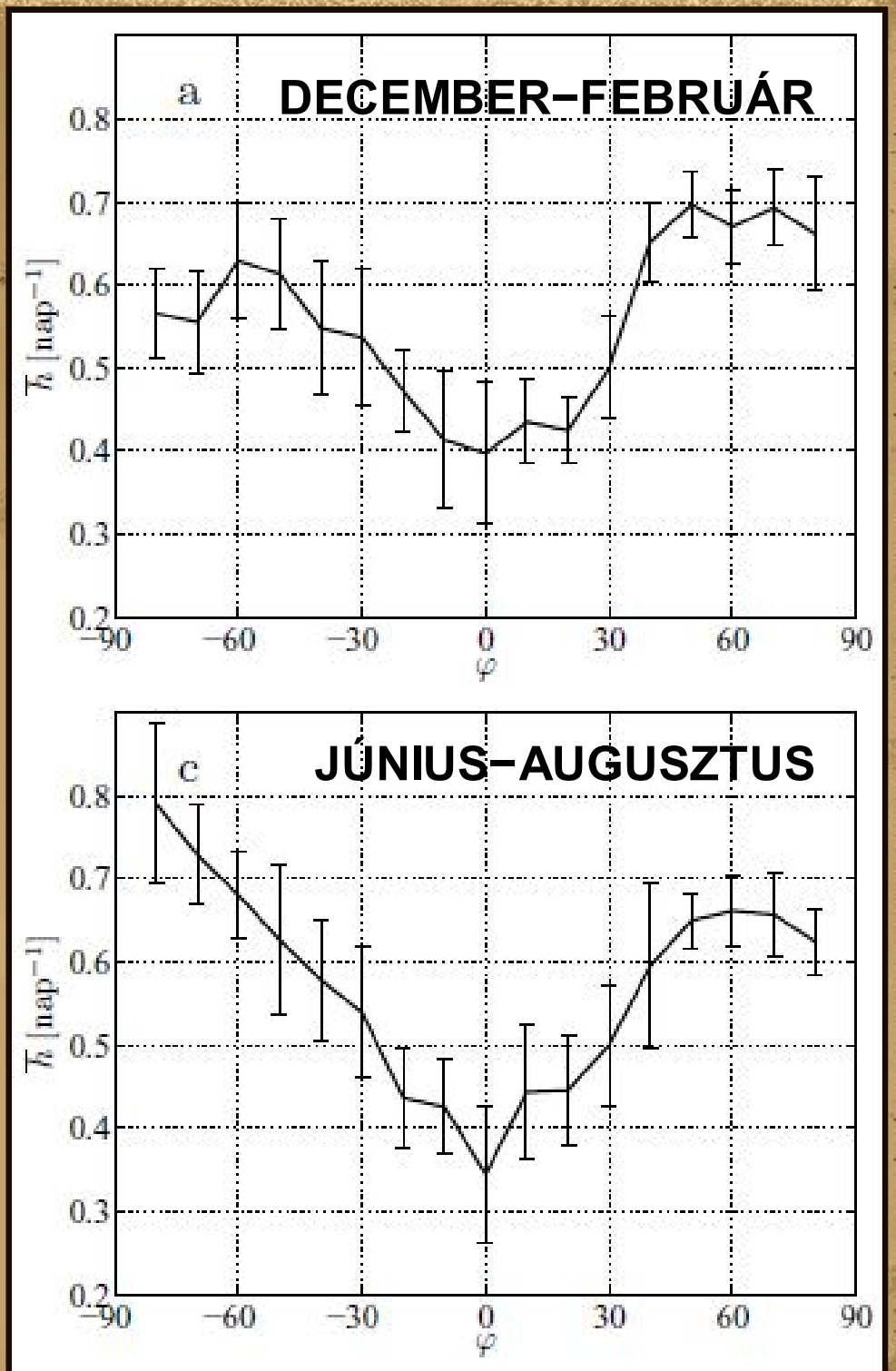
$p = 500$  hPa,  $r = 0$   $\mu$ m,  $L_0 = 3^\circ$



# Topologikus entrópia ( $h$ )

## Földrajzi és évszakos eloszlás

- *Legnagyobb* ( $0,6-0,9 \text{ nap}^{-1}$ )  
közepes szélességeken (főként télen)  
↑  
ciklonok erős keverési és nyírási hatása  
a részecskékre
- *Legkisebb* ( $0,2-0,5 \text{ nap}^{-1}$ )  
trópusok
- $t = 10 \text{ nap}$   
 $h = 0,65 \text{ nap}^{-1} \rightarrow 670 L_0$   
 $\Delta h = 0,7 \text{ nap}^{-1} \rightarrow 1100 L_{\max}/L_{\min}$

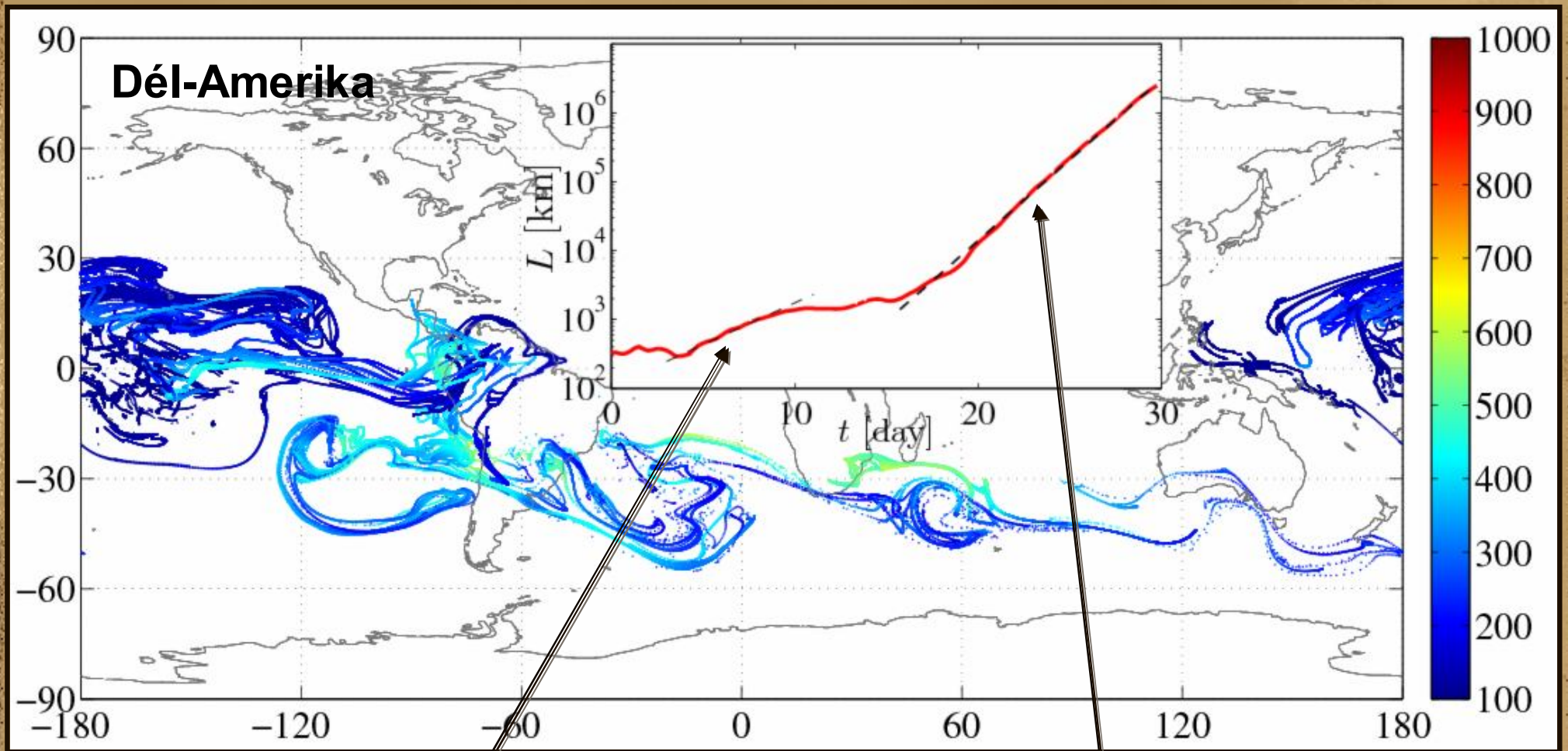






# Topologikus entrópia

10 napos vs. „hosszú idejű” topologikus entrópia



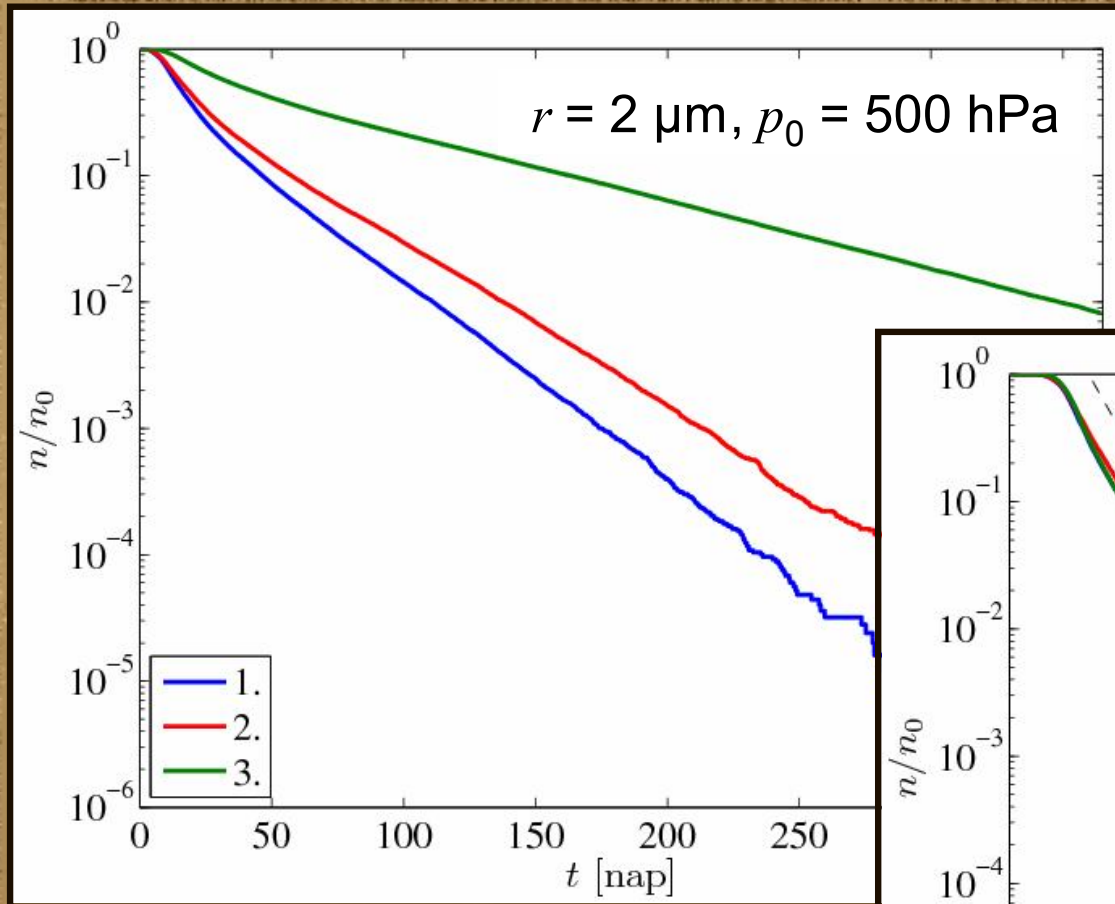
$$h = 0,25 \text{ nap}^{-1}$$

$$h = 0,54 \text{ nap}^{-1}$$

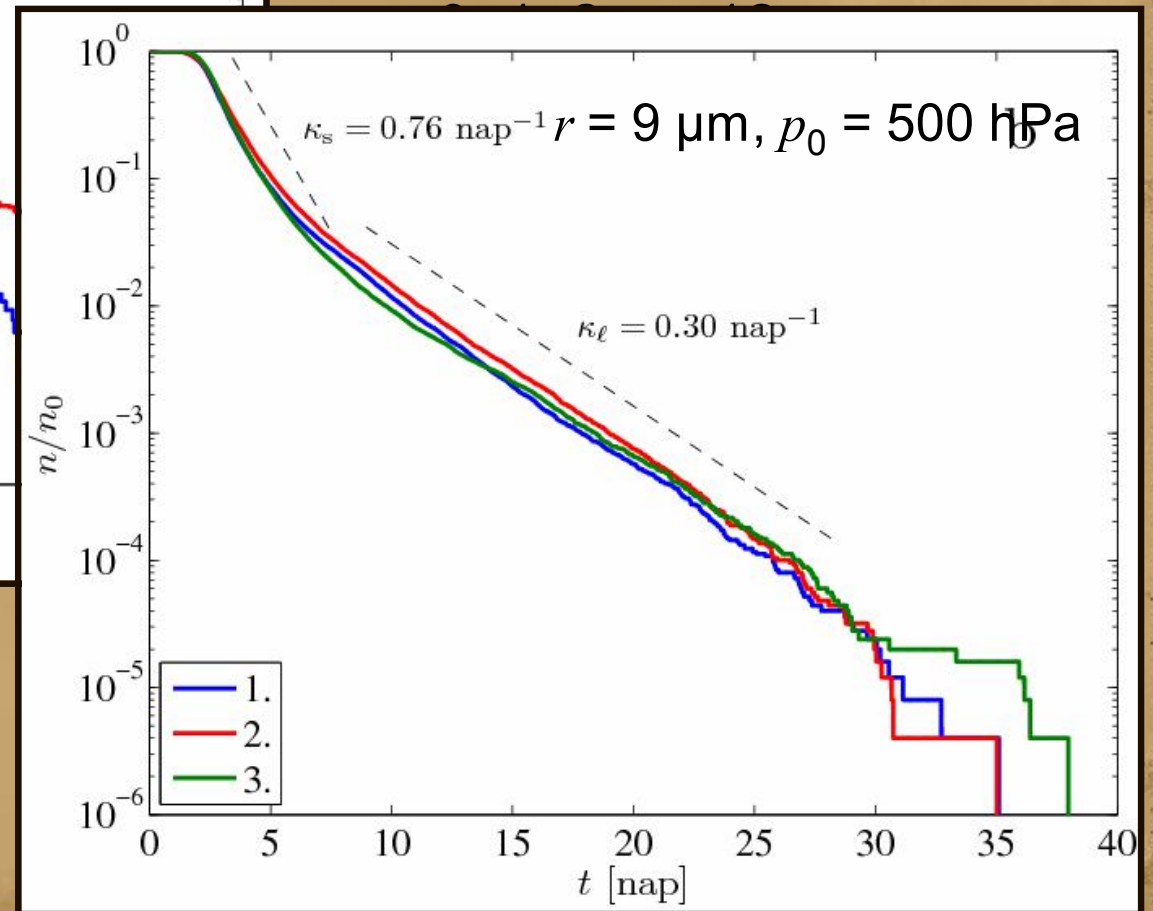


# A részecskék kiülepedésnek üteme

## Szökési ráta ( $\kappa$ )



- $n_0 = 2,5 \cdot 10^5$  részecske
- egyenletes elosztva adott  $p_0$  szinten a légkörben
- $p_0 = 500, 700, 850, 900 \text{ hPa}$



$$\frac{n(t)}{n_0} \sim \exp(-\kappa_s t), \exp(-\kappa_l t)$$

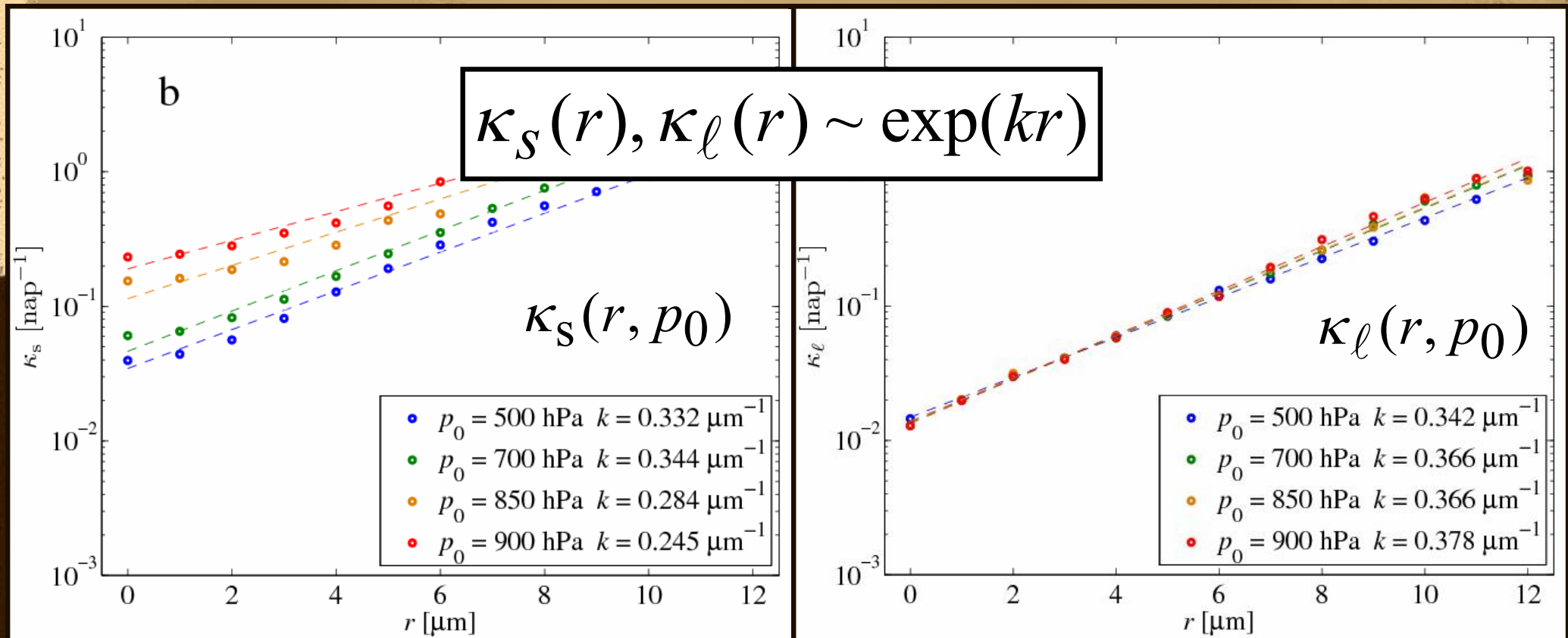
# Szökési ráta ( $\kappa$ )

$\kappa$  függése  $r$ -től és  $p_0$ -tól

$\kappa_s$ : rövidtávú szökési ráta  
a részecskék többségét jellemzi

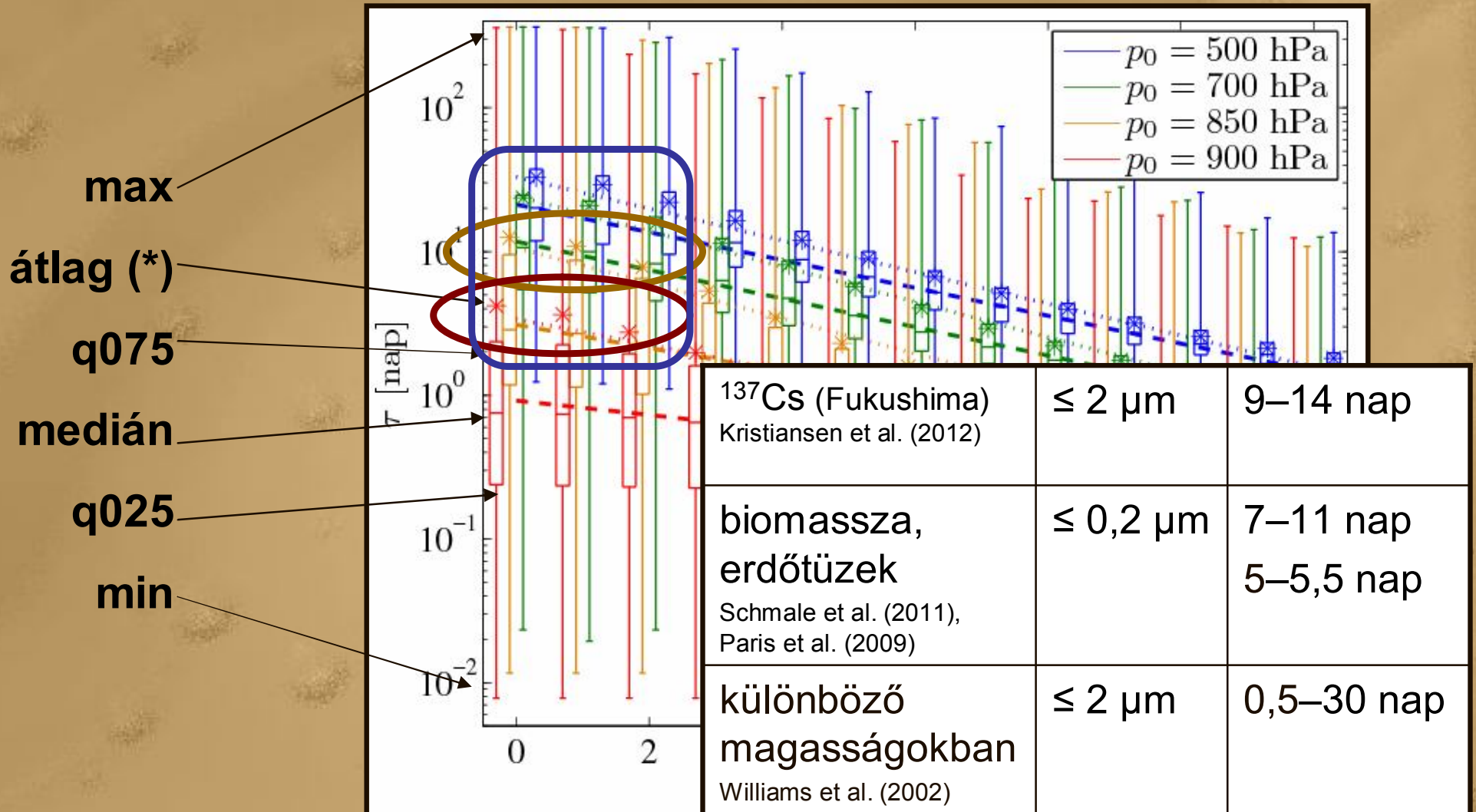
$$\frac{n(t)}{n_0} \sim \exp(-\kappa_s t), \exp(-\kappa_\ell t)$$

$\kappa_\ell$ : hosszútávú szökési ráta  
a sokáig légkörben maradó  
részecskéket jellemzi  $\rightarrow$  jól  
elkeveredtek már



# Tartózkodási idő ( $\tau$ ) a káosz átlagos élettartama

$\tau$  a magassággal nő  
 $\tau \sim \exp(-kr)$  és  $\tau \approx 1/\kappa_s$





# Összefoglalás

- a RePLaT lagrange-i terjedési modell kidolgozása
- a modell tesztelése az Eyjafjallajökull vulkán és a fukushimai baleset esetén
  - Haszpra, T., Tél, T. (2011): Volcanic ash in the free atmosphere: A dynamical systems approach. *Journal of Physics: Conference Series*, **333**, 012008.
  - Haszpra T. (2013): Világjáró részecskék a légkörben – Az Eyjafjallajökull vulkán kitörésének és a fukushimai balesetnek a tanulságai. *Természet Világa*, **144**, Káosz, környezet, komplexitás különszám, 67–72.

# Összefoglalás

- a RePLaT egyedi részecskék mozgását határozza meg → alkalmas a sodródás dinamikai rendszerek szemléletében, a **kaotikus viselkedés** szempontjából való tanulmányozására is
- a szennyeződésfelhők nyúlását jellemző **topologikus entrópia**
  - Haszpra, T., Tél, T. (2013): Topological entropy: a Lagrangian measure of the state of the free atmosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **70**, 12, 4030–4040.
- a részecskék kiülepedésének ütemét leíró **szökési ráta**
  - Haszpra, T., Tél, T. (2013): Escape rate: a Lagrangian measure of particle deposition from the atmosphere. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **20**, 5, 867–881.
- a felhasznált meteorológiai mezőkben rejlő bizonytalanságok vizsgálata a terjedési számításra (ensemble előrejelzés)
  - Haszpra, T., Lagzi, I., Tél, T. (2013): Dispersion of aerosol particles in the free atmosphere using ensemble forecasts. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **20**, 5, 759–770.